Nom : **Prénom :**

Test de cours sur les applications linéaires

NOTE :

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. Quand dit-on que f est une application linéaire ? ....
2. On pose : $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$. Déterminez : $(f+id)^2$. ....
3. Déterminez l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right)$ et $f\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)$ ....
4. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Qu'appelle-t-on :
   (a) Noyau de f ? ....
   (b) Image de f ? ....
5. Complétez : (a) f est injective si et seulement si ....
   (b) f est surjective si et seulement si ....
6. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Qu'appelle-t-on rang de f ? ....
   (b) Énoncez le théorème du rang ....
7. Quand dit-on que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes ? ....
8. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^6$ et $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{K})$ sont-ils isomorphes ? Justifiez. ....
9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. Quand dit-on que :
   (a) $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection sur F parallèlement à G ? ....
   (b) $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie sur F parallèlement à G ? ....
10. On note f définie par : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Expliquez la démarche à adopter pour montrer que f est un projecteur, puis déterminer ses éléments caractéristiques. ....