Chapitre 9

Géométrie dans l'espace

⇝ 7h

Table des matières

On note $\mathcal{E}$ l'espace usuel et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 Généralités

Estimation : 1h30
Durée : 1h30

1.1 Vecteurs et angles de vecteurs dans l'espace

➩ La notion de vecteurs, ainsi que les opérations associées, sont les mêmes que dans le plan.

➩ Angles de vecteurs :

La notion d'angles orientés de vecteurs dans l'espace n'existe pas à priori : elle change selon le « côté » d'où on regarde l'angle.

On notera $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \in [0;\ \pi]$ l'angle **non orienté** des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace.

➩ Vecteurs coplanaires :

DÉFINITION :

On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsqu'il existe α, β et γ non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Exemple : Si $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires. Plus généralement si $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs, alors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

1.2 Bases de l'espace

DÉFINITION :

1. On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de la forme : $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, avec α, β et γ trois nombres réels ;
2. On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathcal{E}$ si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$;
3. Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, on appelle le triplet $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ les composantes de $\overrightarrow{t}$ dans $\mathcal{E}$. On note également : $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Lorsque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la base est orthogonale ;

(2) si de plus $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1$, on dit que $\mathcal{B}$ est orthonormale :

(3) On dit que trois vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forment une base directe s'ils suivent de plus la règle du « tire bouchon ».

Proposition

1. **(caractérisation des bases de l'espace)** Trois vecteurs de $\mathcal{E}$ forment une base de $\mathcal{E}$ si et seulement s'ils sont non coplanaires ;
2. **(composantes et opérations)** Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$. Alors :
   - $\overrightarrow{t_1}+\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ \gamma_1+\gamma_2\end{pmatrix}$;
   - Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\beta_1\\ \lambda\gamma_1\end{pmatrix}$.

Exercice : On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormale directe usuelle et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace et déterminer les composantes de $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$.

1.3 Coordonnées cartésiennes

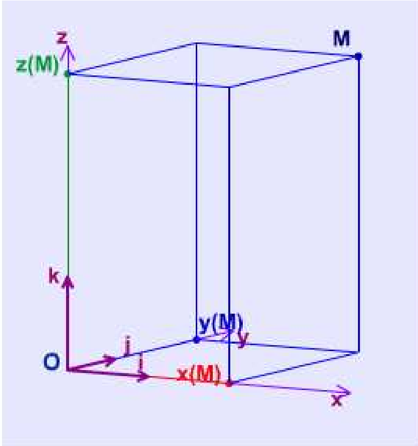
➩ définition :

DÉFINITION :

1. Soit O un point de l'espace. On dit que $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ lorsque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathcal{E}$;
2. Si de plus, $\mathcal{B}$ est orthogonale, directe, orthonormale, on dira que $\mathcal{R}$ est respectivement orthogonal, direct, orthonormé (ou orthonormal).

Proposition

Soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien et $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, appelé coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}$, tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$. On note $M(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$.



➩ coordonnées cartésiennes et composantes de vecteurs :

Proposition
Si $\mathcal{R}$ est un repère cartésien quelconque du plan associé à une base $\mathcal{B}$ et $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ dans $\mathcal{R}$. Alors (dans $\mathcal{B}$), $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

conséquence :

Notant $I(x_I;\ y_I;\ z_I)$ le milieu de $[AB]$, nous avons : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = x_B - x_I \\ x_I - x_A = x_B - x_I \\ z_I - z_A = z_B - z_I \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}} \\ \boxed{y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}} \\ \boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}} \end{cases}.$$

2 Outils de calcul vectoriel

Estimation : 2h
Durée : 2h

2.1 Produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel tel que : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

REMARQUE : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

➩ produit scalaire et orthogonalité :

Proposition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

➩ propriétés vérifiées par le produit scalaire :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

➩ expression en base orthonormale :

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}))$ une base orthonormale et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'.$$

REMARQUE : En particulier, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Exemple : On note : $A = (1;\ 0;\ 1)$ et $B = (0;\ 1;\ 1)$. Alors :

- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1$.
- $OA = ||\overrightarrow{OA}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- $OB = ||\overrightarrow{OB}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^+1^2} = \sqrt{2}$.

2.2 Produit vectoriel de deux vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, de norme : $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

REMARQUE : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, alors $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est orthonormale directe.

➩ produit vectoriel et colinéarité :

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

➩ propriétés vérifiées par le produit vectoriel :

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$;
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$: le produit vectoriel est antisymétrique ;
3. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

➩ expression en base orthonormale **directe** :

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ -(ac' - ca') \\ ab' - ba' \end{pmatrix}.$$

Exemple : Pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

➩ application au calcul d'aires :

Proposition

1. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|\right|.$$
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A}=\left|\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|\right|.$$

Exemple : En notant $A(1;\ 0\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 1)$, nous avons :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{OAB}&=\frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right|\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|\right|\\&=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

2.3 Déterminant de trois vecteurs

DÉFINITION :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on note $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$ le réel : $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

➩ déterminant et bases :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :

1. $\mathcal{B}=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base de l'espace si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\neq 0$;
2. $\mathcal{B}=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base directe de l'espace si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]>0$.

➩ propriétés vérifiées par le déterminant :

Proposition

1. Pour tous réels λ et μ nous avons :

$$\left.\begin{array}{l}[\vec{u}, \lambda\vec{v_1} + \mu\vec{v_2}, \vec{w}] = \lambda\,[\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{w}] + \mu\,[\vec{u}, \vec{v_2}, \vec{w}]\\ [\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w_1} + \mu\vec{w_2}] = \lambda\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_1}] + \mu\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w_2}]\\ [\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda\,[\vec{u_1}, \vec{v}, \vec{w}] + \mu\,[\vec{u_2}, \vec{v}, \vec{w}]\end{array}\right\}\text{ trilinéaire}$$

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -\,[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$. Plus généralement, le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs (antisymétrie).
3. $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$ (alterné).

➩ expression en base orthonormale **directe** :

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe et $\vec{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Alors :

$$[(]\,\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

REMARQUE : Pour retenir l'expression du déterminant, on utilise en pratique la « règle de Sarrus ». Elle consiste à écrire les trois colonnes puis les deux premières. Pour chacune des 6 diagonales qui apparaissent, on effectue le produit des termes puis on ajoute ou soustraie ces quantités suivant le schéma suivant :

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -8$.

➩ application au calcul de volumes :

Proposition

Soit V le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Alors :

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

3 Plans et spheres de l'espace

Estimation : 2h
Durée : 1h45

3.1 Plans

➩ caractérisations équivalentes :

Un plan $\mathcal{P}$ est donné :

- soit par la donnée de trois points non alignés A, B et C. Alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0;$$
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires. Alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = 0;$$
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux c'est à dire tels que :
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

➩ équation cartésienne d'un plan :

Proposition

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M(x;\ y;\ z)$ dans $\mathcal{R}$. Alors $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si il existe des réels a, b, c, d tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d non nuls simultanément. Une telle équation est appelée équation cartésienne ;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x;\ y;\ z)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c, d réels non nuls simultanément est un plan.

Exercice : Déterminer une équation cartésienne

1. du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1;\ 0;\ 0)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$ et $C(0;\ 0;\ 1)$;
2. du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes.

(2) Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$.

➩ distance d'un point à un plan :

Proposition

Soient $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors la distance du point M au plan $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, est donnée par la formule :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple : La distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$ est $d(O, \mathcal{P}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.2 Intersection de deux plans

Proposition

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives : $ax+by+cz+d = 0$ et $a'x+b'y+c'z+d' = 0$. Alors :

1. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus ;
2. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite dont une représentation cartésienne est : $\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right.$.

Exemple : Nature de l'intersection de $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}' : x - y + z = 1$.

3.3 Spheres de l'espace

DÉFINITION :

On appelle sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\Omega M = R$.

Exemple : $M(x;\ y;\ z)$ appartient à la sphère de centre O et de rayon 1 si et seulement si :

$$\begin{aligned} OM = 1 \quad &\Leftrightarrow OM^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

Proposition

1. La sphère S de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$;
2. Réciproquement, si $(a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3$ et $d > 0$, l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ tels que : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$ est l'équation d'une sphère de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon $\sqrt{d}$.

Exemple : Une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $(1;\ 2;\ 1)$ et de rayon 4 est $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$.

Exercice : Montrer que la surface d'équation : $x^2-4x+y^2+6y+z^2-zy-23=0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

3.4 Intersection d'un plan et d'une sphère

Proposition
Soient S la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{P})<R$, l'intersection de S et $\mathcal{P}$ est un cercle de rayon $r=\sqrt{R^2-d(\Omega;\ \mathcal{P})^2}$;
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{P})=R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{P})>R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas ;

Exercice : (non traité en classe) Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4 Droites de l'espace

Estimation : 2h
Durée : 1h45

4.1 Droites en coordonnées cartésiennes

➩ caractérisations équivalentes :

Une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ est caractérisée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note alors $\mathcal{D}=(AB)$ et (AB) est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0};$$
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul. Alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0};$$
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Alors : $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_1}=0 \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_2}=0 \end{cases}.$$

➩ représentation cartésienne d'une droite :

Proposition

Toute droite admet une représentation, appelée représentation cartésienne, de la forme : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

Exercice : Déterminer une représentation cartésienne :

1. de la droite passant par $A(1;\ 0;\ 1)$ et $b(0;\ 1;\ 0)$;
2. de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

REMARQUES :

(1) Une droite admet une infinité de représentations cartésiennes ;

(2) Si $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs orthogonaux $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

➩ distance d'un point à une droite : :

Proposition

Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, $A \in \mathcal{D}$ et M un point de l'espace. Alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}.$$

Exercice : Calculer la distance de l'origine à la droite (AB), avec $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

4.2 Représentation paramétrique

Proposition

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point $A(a;\ b;\ c)$ admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \\ z = c + t\gamma \end{cases}$

Exemple : Une représentation paramétrique de la droite (AB) avec $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

En effet, un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

REMARQUE : Une droite admet plusieurs représentations paramétriques : on peut changer de vecteur directeur ou de point A ;

Exercice : Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne : $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

4.3 Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition

Soient S une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{D}) < R$, S et $\mathcal{D}$ se coupent en deux points ;
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente à la sphère en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas ;

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆