Devoir surveillé n° 11.

Durée : 1h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 3x + 4}$;
   En déduire que g est dérivable en 1, préciser $g'(1)$ et l'équation de sa tangente en 1 et enfin la position locale de la courbe représentative de g par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1 ;
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - \cos(x)}{(1-\cos(x))^2}$;
3. Calculer $\lim\limits_{t\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}\right)$;
4. Déterminer l'équivalent le plus simple possible en $+\infty$ de $\sqrt{x^3+x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$;
5. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}e^{1/x}$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote ;
6. On admet que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel $x_n \in [0; +\infty[$ tel que $e^{x_n} - x_n = n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_n \geq \ln(n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\ln(1 - \frac{x_n}{e^{x_n}}) = \ln(n) - x_n$. En déduire $x_n \sim \ln(n)$.
   (c) On pose $v_n = x_n - \ln(n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\forall n \geq 1$, $e^{v_n} - 1 = \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{v_n}{n}$.
   (d) En déduire un équivalent simple de v_n puis montrer que : $x_n = \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

Correction de l'exercice :

1. On pose : $x = 1 + h$ avec h proche de 0 lorsque x est proche de 1. Alors :

$$\begin{aligned} g(1+h) &= \frac{\ln(1+h)}{2-h+h^2} = \frac{\ln(1+h)}{2(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2})} \\ &= \frac{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)}{2} \times \left(1 + \tfrac{1}{2}h - \frac{1}{2}h^2 + \left(\tfrac{h}{2} - \tfrac{h^2}{2}\right)^2 + o_0(h^2)\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o_0(h^2)\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{6}h^2 + o_0(h^2)\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3).}$$

Il s'ensuit que $g'(1) = \dfrac{1}{2}$ et que la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 a pour équation $\boxed{y = \frac{1}{2}(x-1).}$ De plus,

$$g(1+h) - \frac{1}{2}h \sim_0 -\frac{1}{12}h^3.$$

Deux fonctions équivalentes en un point étant de même signe strictement au voisinage de ce point, on en déduit que la courbe représentative de g est située :

$\boxed{\text{au-dessus de sa tangente au voisinage de } 1^- \text{ et en-dessous au voisinage de } 1^+.}$

2. Nous avons $1 - \cos(x) \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$ par équivalents usuels donc par produit $(1-\cos(x))^2 \sim_0 \dfrac{x^4}{4}$.

Au numérateur nous utilisons l'outil développement limité : $e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - \cos(x) = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^2 - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o_0(x^4) = \dfrac{11}{12}x^4 + o_0(x^4)$. Ainsi : $e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - \cos(x) \sim_0 \dfrac{11}{12}x^4$. Au final, par quotient d'équivalents nous en déduisons : $\dfrac{e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - \cos(x)}{(1-\cos(x))^2} \sim_0 \dfrac{11}{3}$ ce qui prouve que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 - \cos(x)}{(1-\cos(x))^2} = \dfrac{11}{3}.}$

3. Commmençons par mettre au même dénominateur :
$\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} = \dfrac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}$.
Or, on posant $t = 1 + u$ nous obtenons :

- au numérateur : $u - \ln(1+u) = \frac{1}{2}u^2 + o_0(u^2)$ donc : $u - \ln(1+u) \sim_0 \frac{1}{2}u^2$.
- au dénominateur : $u\ln(1+u) \sim_0 u^2$ par produit d'équivalents usuels.

Ainsi, par quotient d'équivalents : $\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} \sim_1 \dfrac{\frac{1}{2}(t-1)^2}{(t-1)^2} \sim_1 \frac{1}{2}$.

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}\right) = \dfrac{1}{2}.}$

4. Nous avons $x^3 + x \sim_{+\infty} x^3$ donc par passage à la puissance : $\sqrt{x^3+x} \sin_{+\infty} x^{3/2}$. Par ailleurs : $\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \ln(1 + v(x))$ avec $v(x) = \dfrac{2}{e^x-1}$. Par opérations usuelles $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$ donc par équivalents usuels : $\ln(1+v(x)) \sim_{+\infty} v(x)$. On en déduit $\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{2}{e^x-1} \sim_{+\infty} \dfrac{2}{e^x}$ car $e^x - 1 \sim_{+\infty} e^x$. En effet, $\dfrac{e^x-1}{e^x} = 1 - e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1$ par opérations usuelles. Au final, par produit d'équivalents : $\boxed{\sqrt{x^3+x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{2x^{3/2}}{e^x}.}$

5. On pose : $x = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{x}$, avec u proche de 0 lorsque x est au voisiange de $+\infty$. Alors l'expression devient :

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{u}\right) &= \sqrt{\tfrac{1}{u^2}+1}e^u \\ &= \frac{1}{u}\sqrt{1+u^2}e^u \\ &= \frac{1}{u}\left(1+\tfrac{1}{2}u^2+o_0(u^2)\right)\left(1+u+\tfrac{1}{2}u^2+o_0(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u}\left(1+u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{2}u^2+o_0(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u}+1+u+o_0(u). \end{aligned}$$

Ceci prouve que : $f(x) = x+1+\frac{1}{x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc que : $f(x)-(x+1) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. En conclusion :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ce qui entraine que : $y = x+1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ donc la courbe représentative de f est située au-dessus de son asymptote sur un voisinage de $+\infty$.

6. (a) Nous obtenons : $n = f(x_n) = e^{x_n} - x_n \leq e^{x_n}$ car $x_n \geq 0$. En passant au logarithme, nous avons : $\boxed{\ln(n) \leq x_n}$. Par le théorème de divergence par minoration, $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } +\infty.}$

$$\begin{aligned} \ln(1-\tfrac{x_n}{e^{x_n}}) &= \ln(\tfrac{e^{x_n}-x_n}{e^{x_n}}) = \ln(\tfrac{n}{e^{x_n}}) \\ &= \ln(n) - \ln(e^{x_n}) = \boxed{\ln(n) - x_n} \end{aligned}$$

(b) D'après précédemment $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) - x_n = \ln(1-\frac{x_n}{e^{x_n}})$. Or (x_n) tend vers $+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée. Donc $\left(-\frac{x_n}{e^{x_n}}\right)$ tend vers 0. Par équivalent usuel, $\boxed{\ln(n) - x_n \sim -\dfrac{x_n}{e^{x_n}}}$. Divisons alors par x_n et obtenons : $\dfrac{\ln(n)}{x_n} - 1 \sim -\dfrac{1}{e^{x_n}}$. Par ce qui précède $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{e^{x_n}} = 0$, et ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{x_n} = 1}$ puis par définition $\boxed{x_n \sim \ln(n)}$.

(c) D'après précédemment $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) - x_n = \ln(1-\frac{x_n}{e^{x_n}})$ donc $v_n = -\ln(1-\frac{x_n}{e^{x_n}})$. Or, par croissances comparées, et puisque (x_n) tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{x_n}{e^{x_n}} = 0$ d'où par composition des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1-\dfrac{x_n}{e^{x_n}}) = 0$ ce qui entraîne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.}$

Par ailleurs, par définition de x_n, $\forall n \geq 1$, $e^{x_n} - x_n = n$. Or $x_n = \ln(n) + v_n$ donc en remplaçant nous en déduisons : $ne^{v_n} - \ln(n) - v_n = n$. En divisant par $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons donc : $\forall n \geq 1$, $e^{v_n} - \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{v_n}{n} = 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{e^{v_n} - 1 = \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{v_n}{n}.}$

(d) On remarque que $v_n = o(\ln(n))$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et donc par opérations usuelles $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{\ln(n)} = 0$. On en déduit : $\dfrac{v_n}{n} = o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ puis $\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ d'où $\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{v_n}{n} \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$ par propriété.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc par équivalents usuels : $e^{v_n} - 1 \sin v_n$. Nous avons donc au final : $\boxed{v_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}.}$

Par propriété cela s'écrit également : $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ c'est à dire :

$$x_n - \ln(n) = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \Leftrightarrow \boxed{x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆