

Devoir surveillé n° 10.

Durée : 1h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Un groupe de n amis ($n \geq 3$) parie l'issue d'un match de rugby opposant deux équipes de rugby : l'équipe A et l'équipe B. On fait les hypothèses suivantes :

- Chaque équipe a probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner le match.
- Le match n'est pas truqué : son issue est indépendante des paris des joueurs.
- Chaque joueur parie 1 euro.
- Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- Un joueur est déclaré gagnant s'il a parié sur la bonne issue du match.
- L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise de n euros.
- S'il n'y a aucun gagnant la somme de n euros est reversé au club de rugby local.

Dans l'ensemble de l'exercice on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match. Ce gain ne prend pas en compte la somme qui a été mise. Ainsi, s'il y a $m \geq 1$ joueurs gagnants, le gain de chacun des joueurs est de $\frac{n}{m}$.

1. Calcul de l'espérance du gain pour un joueur.

On numérote les joueurs de 1 à n et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note :

- Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur a gagné et 0 sinon.
- X_k le gain, en euros, du joueur k à l'issue du match.

Enfin on note :

- $N = \sum_{k=1}^n Y_k$ le nombre de gagnants.
- $S = \sum_{k=1}^n X_k$ la somme des gains, en euros, des joueurs.

On admet que (X_k, Y_k, N, S) sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

- (a) Donner la loi de Y_k pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ainsi que celle de N . On explicitera les probabilités associées à ces lois.
- (b) Expliquer pourquoi $S(\Omega) = \{0; n\}$ puis expliciter la loi de S et calculer $E(S)$.
- (c) En déduire la valeur de $E(X_k)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (le calcul de la loi de X_k n'est pas nécessaire dans cette question).
- (d) Un nouvel ami arrive dans le groupe, les joueurs ont-ils intérêt à ce qu'il parie avec eux ?

2. Étude de la variable X_k .

On fixe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et on étudie la variable aléatoire X_k .

- (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_k = 0)$.
- (b) Quelle est la loi conditionnelle de la variable $N - 1$ sachant l'évènement $(Y_k = 1)$?
- (c) En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On pourra utiliser les événements $(X_k = \frac{n}{i})$, $(Y_k = 1)$ et $(N = i)$.

- (d) Retrouver les valeurs de $E(X_k)$ calculées dans la partie précédente.
- (e) On considère un autre joueur $j \neq k$. Les variables X_j et X_k sont-elles indépendantes ?

FIN

Correction de l'exercice :**1. Calcul de l'espérance du gain pour un joueur.**

(a) Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. De plus $N = \sum_{k=1}^n Y_k$ où les variables aléatoires Y_k sont indépendantes par hypothèse. Par propriété N suit une loi de Bernoulli de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

(b) Si tous les joueurs perdent, $S = 0$. Par ailleurs, s'il y a m joueurs qui gagnent ($m \geq 1$) alors chaque joueur reçoit $\frac{n}{m}$ euros. Ainsi la somme totale reçue par l'ensemble des m gagnants est $S = \frac{n}{m}m = n$. D'où $S(\Omega) = \{0; n\}$.

$\mathbb{P}(S = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puisqu'il s'agit de la situation où tous les joueurs perdent. $\mathbb{P}(S = n) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Au final :

$$E(S) = n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

(c) Puisque $S = \sum_{k=1}^n X_k$, par linéarité de l'indépendance, $E(S) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = nE(X_k)$ car par hypothèse tous les X_k ont la même loi. Au final :

$$E(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(d) La fonction $n \mapsto 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est croissante donc rajouter un joueur augmente le gain moyen de chaque joueur. Ainsi, les joueurs ont intérêt à ce qu'un nouvel ami parie avec eux.

2. Étude de la variable X_k .

(a) $\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}$.

(b) Si l'on sait que $(Y_k = 1)$ est réalisé, $(N - 1)(\Omega) = \llbracket 0; n - 1$ et $N - 1$ suit une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et $\frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \mathbb{P}((Y_k = 1) \cap (N = i)) = \mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}((N = i)|(Y_k = 1))$. De plus $\mathbb{P}((N = i)|(Y_k = 1)) = \mathbb{P}((N - 1 = i - 1)|(Y_k = 1)) = \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Au final, on en déduit :

$$\mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(d) $E(X_k) = 0\mathbb{P}(X_k = 0) + \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (2^n - 1) \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

On en déduit au final $E(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ce qui nous permet de retrouver la même expression que ci-dessus.

(e) $\mathbb{P}((X_k = 0)|(X_j = n)) = 1$ car si $X_j = n$ tous les autres joueurs perdent.

Ainsi, par définition des probabilités conditionnelles :

$$\boxed{\mathbb{P}((X_k = 0) \cap (X_j = n))} = \mathbb{P}(X_j = n) \boxed{\neq \mathbb{P}(X_j = n)\mathbb{P}(X_k = 0)} \text{ car}$$

$\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{1}{2}$. Par conséquent X_j et X_k ne sont pas indépendantes.

FIN
