Devoir surveillé n° 10.

Durée : 2h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

(a) $\ln(e^{-t} + 2\sin(t))$ à l'ordre 4 en 0.

(b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+t}}$ à l'ordre 3 en 0.

(c) $\dfrac{1}{t}$ à l'ordre n en 2.

(d) $\displaystyle\int_0^{2x} e^{-t^2}\, dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ calculer la dimension de $\mathrm{Vect}((2^n),\ 1)$.
2. On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ /\ AM = MA\}$.
   (a) On admet que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension.
   (b) En déduire : $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ on note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ /\ P(1) = P'(1)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ /\ P(0) = P'(0)\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et calculer la dimension de F.
   (b) Déterminer la dimension de $F \cap G$ et préciser une base.
   (c) Déterminer un supplémentaire de $F \cap G$ dans E.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $\dim(E) = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On considère H_1, H_2 et H_3 trois sous-espaces vectoriels de E distincts tels que $\dim(H_1) = \dim(H_2) = \dim(H_3) = n-1$ et on note $F = H_1 + H_2$.
   (a) Montrer que si $F = H_1$ alors $H_1 = H_2$. En déduire $F = E$ puis $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$. De même, on admet que $\dim(H_2 \cap H_3) = \dim(H_1 \cap H_3) = n-2$.
   (b) Montrer que $H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3 \subset F \cap H_3$.
   (c) Montrer que :
   $$\dim(F+H_3) \leq \dim(H_1)+\dim(H_2)+\dim(H_3)-\dim(H_1\cap H_2)-\dim(H_2\cap H_3)-\dim(H_1\cap H_3)+\dim(H_1\cap H_2\cap H_3).$$
   (d) En déduire $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n-3$ ou $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n-2$.
   (e) On suppose $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n-2$. Montrer qu'alors $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

(a) Nous avons : $e^{-t}+\sin(t) = 1+t+\frac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{1}{24}t^4$. Donc $\ln(e^{-t}+2\sin(t)) = \ln(1+u)$ avec $u = t+\frac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{1}{24}t^4$. Ainsi :

$\ln(e^{-t}+2\sin(t)) = u-\dfrac{1}{2}u^2+\dfrac{1}{3}u^3-\dfrac{1}{4}u^4+o_0(u^4)$ avec :

- $u^2 = t^2+t^3-t^4+\frac{1}{4}t^4+o_0(t^4) = t^2+t^3-\frac{3}{4}t^4+o_0(t^4)$;
- $u^3 = uu^2 = t^3+t^4+\dfrac{1}{2}t^4+o_0(t^4) = t^3+\dfrac{3}{2}t^4+o_0(t^4)$;
- $u^4 = t^4+o_0(t^4)$;
- $o_0(u^4) = o_0(t^4)$.

Au final : $\boxed{\ln(e^{-t}+2\sin(t)) = t-\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{2}{3}t^4+o_0(t^4).}$

(b) Nous avons $\sqrt{1+t} = 1+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{1}{16}t^3+o_0(t^3)$ donc : $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+t}} = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}t^3+o_0(t^3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{1}{4}t-\dfrac{1}{16}t^2+\dfrac{1}{32}t^3+o_0(t^3)$. Ainsi :

$\dfrac{1}{1+\sqrt{1+t}} = 1-u+u^2-u^3+o_0(u^3)$ avec :

- $u^2 = \dfrac{1}{16}t^2-\dfrac{1}{32}t^3+o_0(t^3)$;
- $u^3 = \dfrac{1}{64}t^3+o_0(t^3)$;
- $o_0(u^3) = o_0(t^3)$.

Au final : $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{1+t}} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}t+\dfrac{1}{16}t^2-\dfrac{5}{128}t^3+o_0(t^3).}$

(c) Posons $t = 2+h$ avec h au voisinage 0 lorsque t est au voisinage de 2. Alors : $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{2+u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+u/2} = \dfrac{1}{2}\sum k = 0^n(-1)^k\dfrac{u^k}{2^k}+o_0(u^n) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{u^k}{2^{k+1}}+o_0(u^n)$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{t} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(t-2)^k}{2^{k+1}}+o_2((t-2)^n).}$$

(d) Nous avons : $e^{-t^2} = 1-t^2+\dfrac{1}{4}t^4+o_0(t^4)$. La fonction étant de plus continue, par intégration d'un développement limité on en déduit que : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{20}x^5+o_0(x^5)$. Au final : $\boxed{\displaystyle\int_0^{2x} e^{-t^2}\,dt = 2x-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{5}x^5+o_0(x^5).}$

Correction de l'exercice 2:

1. On constate que $((2^n),\ 1)$ est une famille libre. En effet, soient deux réels a, b tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a+b2^n = 0$. Alors, pour $n=0$ nous avons : $a+b=0$ et pour $n=1$, nous avons : $a+2b=0$. En retranchant les deux relations cela entraîne $b=0$ puis $a=-b=0$. On en déduit que $((2^n),\ 1)$ est une base de $\mathrm{Vect}((2^n),\ 1)$ puisqu'elle est génératrice par définition, et libre d'après prcédemment. Par conséquent : $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}((2^n),\ 1)) = 2.}$

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors par calcul matriciel : $AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a-2c & -b-2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -2a+b \\ -c+d & -2c+2d \end{pmatrix}$. On en déduit $b=-2c$ et $d = a+3c$ donc $M = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a+3c \end{pmatrix} = aI_2+bN$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $M \in \mathrm{Vect}(I_2, N)$ ce qui prouve que : $C(A) \subset \mathrm{Vect}(I_2, N)$. L'autre inclusion est également vraie car $AI_2 = I_2A = A$ et par cacul matriciel : $AN = NA$. Donc I_2 et N sont deux éléments de $C(A)$. Puisque $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nécessairement : $\mathrm{Vect}(I_2, N) \subset C(A)$.

Par double inclusion : $C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, N)$ ce qui prouve que (I_2, N) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Elle est par ailleurs clairement libre car $aI_2 + bN = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a+3c=0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$. C'est donc une base de $C(A)$ ce qui prouve que $\boxed{\dim(C(A)) = 2.}$

(b) $I_2 \in C(A)$ car $AI_2 = I_2A = A$. De plus $A \in C(A)$ car $AA = AA = A^2$. Comme $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nous en déduisons : $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset C(A)$. Par ailleurs (I_2, A) est clairement libre donc de rang 2. Par conséquent : $\dim(\mathrm{Vect}(I_2, A) = 2$.

Au final : $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset C(A)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(I_2, A) = \dim(C(A))$ ce qui par propriété prouve que $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A).}$

3. (a)
- $F \subset \mathbb{R}_3[X]$ par définitioin de F.
- Notons P le polynôme nul. Alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et donc $P(1) = P'(1)$ ce qui prouve que $0_{\mathbb{K}[X]} \in F$.
- Soient P_1 et P_2 deux éléments de F et notons : $Q = \lambda P_1 + \mu P_2$ avec $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $Q(1) = \lambda P_1(1) + \mu P_2(1)$. De plus, puisque $P' = \lambda Q_1' + \mu Q_2'$ alors $Q'(1) = \lambda P_1'(1) + \mu P_2'(1)$. De plus $P_1 \in F$ donc $P_1(1) = P_1'(1)$. De même $P_2(1) = P_2'(1)$. On en déduit : $\lambda P_1(1) + \mu P_2(1) = \lambda P_1'(1) + \mu P_2'(1)$ ce qui prouve que $Q(1) = Q'(1)$ et donc que $Q \in F$.

En conclusion, les trois points suivants étant vérifiés, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors $P \in F$ si et seulement si $P(1) = P'(1)$. Comme $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ cela entraîne que : $a + b + c + d = 3a + 2b + c$. Ainsi $d = 2a + b$ et donc $P = a(X^3 + 2) + b(X^2 + 1) + cX$. Ainsi $P \in \mathrm{Vect}(X^3 + 2, X^2 + 1, X)$. L'autre inclusion est également vraie car $X^3 + 2 \in F$, $X^2 + 1 \in F$ et $X \in F$ et car F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

Par double inclusion $F = \mathrm{Vect}(X^3 + 2, X^2 + 1, X)$ ce qui prouve que $(X^3 + 2, X^2 + 1, X)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de F ce qui prouve que $\boxed{\dim(F) = 3.}$

(b) Soit $P \in F \cap G$. Alors $P = a(X^3 + 2) + b(X^2 + 1) + cX$ car $P \in F$. De plus $P \in G$ donc $P(0) = P'(0)$. Or $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ donc $P'(0) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = c$. On en déduit : $P = a(X^3 + 2X + 2) + b(X^2 + X + 1)$ donc $P \in \mathrm{Vect}(X^3 + 2X + 2, X^2 + X + 1)$.

Nous avons donc $F \cap G \subset \mathrm{Vect}(X^3 + 2X + 2 + 2, X^2 + X + 1)$. Par ailleurs il est évident que $X^3 + 2X + 2 + 2$ et $X^2 + X + 1$ appartiennent à $F \cap G$. $f \cap G$ étant un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels, nécessairement $\mathrm{Vect}(X^3 + 2X + 2 + 2, X^2 + X + 1) \subset F \cap G$. Au final par double inclusion $F \cap G = \mathrm{Vect}(X^3 + 2X + 2 + 2, X^2 + X + 1)$ ce qui prouve que $(X^3 + 2X + 2 + 2, X^2 + X + 1)$ est une famille génératrice de $F \cap G$. Elle est de plus libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de $F \cap G$ ce qui prouve que $\boxed{\dim(F \cap G) = 2.}$

(c) Nous constatons que $(1, X, X^2 + X + 1, X^3 + 2X + 2 + 2)$ est de degrés échelonnés donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Elle est de plus de taille maximale puisque $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. C''est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Par propriété :
$\mathrm{Vect}(1, X) \oplus \mathrm{Vect}(X^3 + 2X + 2 + 2, X^2 + X + 1) = \mathbb{R}_3[X]$ ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(1, X)$ est un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

4. (a) On suppose $F = H_1$ c'est à dire $H_1 + H_2 = H_1$. Allors, puisque $H_2 \subset H_1 + H_2$ nous en déduisons : $H_2 \cap H_1$. De plus $\dim(H_2) = \dim(H_1)$ par hypothèse. Nécessairement $H_1 = H_2$.

Comme H_1 et H_2 sont supposés distincts par hypothèse on en déduit $F \neq H_1$. On constate par ailleurs, car $H_1 \subset F \subset E$ que $\dim(F) = n - 1$ ou $\dim(F) = n$. Or, si $\dim(F) = n - 1$, alors comme $H_1 \subset F$ et $\dim(H_1) = \dim(F)$ celà entraînerait que $F = H_1$. Ceci est impossible d'après précédemment. On en déduit donc : $\boxed{\dim(F) = n.}$

En utilisant la relation de Grassmann on en déduit : $\dim(F) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$. Ainsi : $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(F)$.

Or $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1$ par hypothèse et $\dim(F) = n$ car $F = E$. Au final, nous obtenons : $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2.}$

(b) Soit $\boxed{x \in H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3.}$ Alors $x = u + v$ avec $u \in H_1 \cap H_3$ et $v \in H_2 \cap H_3$. Comme $u \in H_1$ et $v \in H_2$ alors $u + v \in H_1 + H_2$. On en déduit $x \in H_1 + H_2$. De plus $u \in H_3$ et $v \in H_3$. Or, H_3 étant un sous-espace vectoriel de E, nbécessairement $u + v \in H_3$. Par conséquent $x \in H_3$. Au final : $x \in H_1 + H_2$ et $x \in H_3$ donc $\boxed{x \in F \cap H_3}$ ce qu'il fallait démontrer.

(c) D'après Grassmann $\dim(F + H_3) = \dim(F) + \dim(H_3) - \dim(F \cap H_3)$. Or, comme $H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3 \subset F \cap H_3$ d'après la question précédente. Nous avons : $\dim(H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3) \leq \dim(F \cap H_3)$ donc $-\dim(F \cap H_3) \leq \dim(H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3)$. Ainsi :

$$\dim(F + H_3) \leq \dim(F) + \dim(H_3) - \dim(H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3).$$

Par ailleurs, d'après Grassmann, $\dim(F) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$ et, encore d'après Grassmann, $\dim(H_1 \cap H_3 + H_2 \cap H_3) = \dim(H_1 \cap H_3) + \dim(H_2 \cap H_3) - \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_2 \cap H_3)$. En constatant que $H_1 \cap H_2 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3$, nous obtenons au final :

$\dim(F + H_3) \leq \dim(H_1) + \dim(H_2) + \dim(H_3) - \dim(H_1 \cap H_2) - \dim(H_1 \cap H_3) - \dim(H_2 \cap H_3) + \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$.

(d) Nous savons que : $\dim(H_1) = \dim(H_2) = \dim(H_3) = n - 1$ et $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1 \cap H_3) = \dim(H_2 \cap H_3) = n - 2$. De plus $F = E$ et $F \cup F + H_3$ donc $E \subset F + H_3$. Or, F et H_3 étant deux-sous-espaces vectoriels de E, nécessairement $F + H_3$ est un sous-espace vectoriel de E donc $F + H_3 \subset E$. Bref, par double inclusion : $F + H_3 = E$ ce qui prouve que $\dim(F + H_3) = n$. Nous avons donc à l'aide de la relation précédente :

$n \leq 3(n - 1) - 3(n - 2) + \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \Leftrightarrow \boxed{\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \geq n - 3}$.

De plus $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset H_1 \cap H_2$ donc $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \leq n - 2}$ puisque $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

La dimension étant un nombre entier, nécessairement les valeurs possibles sont $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n - 3 \text{ ou } \dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n - 2.}$

(e) Si $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = n - 2$ cela signifie que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \dim(H_1 \cap H_2)$. Or comme $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset H_1 \cap H_2$ nous en déduisons : $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2$.

De même $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \dim(H_1 \cap H_3)$. Or comme $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset H_1 \cap H_3$ nous en déduisons : $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_3$.

Mais nous avons aussi : $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \dim(H_2 \cap H_3)$. Or comme $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \subset H_2 \cap H_3$ nous en déduisons : $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_2 \cap H_3$.

Nous avons donc : $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3$ donc $\boxed{H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3}$ ce qu'il fallait démontrer.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆