À rendre le mardi 14 Mai

Devoir en temps libre n° 11

PROBLÈME

On considère les ensembles F et G suivants : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z \right\}$; $\qquad G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

PARTIE A. (Q 1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(Q 2) Donner une base et la dimension de F.

(Q 3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

PARTIE B. Des applications linéaires.

(Q 1) Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, vérifier que

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2y-z \\ 2y-z \end{pmatrix}.$$

(Q 2) Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y \\ y \end{pmatrix}$. L'application q est-elle un projecteur ?

(Q 3) Donner une famille génératrice de $\ker(q)$ le noyau de q.

(Q 4) Vérifier que $\ker(q) \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

(Q 5) Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.

(Q 6) Vérifier que $p \circ q = q$. De même, on admet que $q \circ p = p$.

PARTIE C. On considère dans cette question un espace vectoriel quelconque E, p et q deux projecteurs définis sur E et tels que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. On considère l'application $r = p + q$.

(Q 1) Montrer que $r^2 = 2r$. L'application r est-elle un projecteur ?

(Q 2) Montrer que $\ker(r) \cap \ker(r - 2id) = \{0_E\}$.

(Q 3) On note id l'application identité de E. Montrer les deux inclusions :

(a) $\mathrm{Im}(r - 2id) \subset \ker(r)$ $\qquad$ (b) $\mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2id)$.

(Q 4) Écrire id comme une combinaison linéaire de r et $r - 2id$.

(Q 5) Déduire des questions précédentes, que $E = \ker(r) \oplus \ker(r - 2id)$.

Correction du problème :

PARTIE A. (Q 1) G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il est engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Puis F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de trois inconnues et une équation. Par propriété, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(Q 2) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors : $u \in F \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$ car $y = z$

$$\Leftrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi : $\boxed{F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$ Puis, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors $\lambda = \mu = 0$. Par définition, cette famille de deux vecteurs est libre. C'est donc une base et F est de dimension 2.

(Q 3) D'une part, F et G sont des sous espaces vectoriels donc $0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à F et G. D'autre part, soit $u \in F \cap G$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Or $u \in F$. Donc la seconde coordonnée doit être égale à la troisième coordonnée. Soit $\lambda = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$. Ainsi, $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a montré que $\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.}$

(Q 4) Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si tout vecteur de E s'écrit comme une somme unique d'un vecteur de F avec un vecteur de G.
Utilisons ici la caractérisation des espaces supplémentaires par l'intersection et les dimensions. On sait que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\dim G + \dim F = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Ainsi, les espaces F et G sont supplémentaires.

PARTIE B. (Q 1) Nous devons donc chercher quelle est la décomposition d'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de F avec un vecteur de G. Cherchons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 &= x \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= y \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= x + y - z \\ \lambda_2 &= 2y - z \\ \lambda_3 &= z - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [x + y - z] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [2y - z] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [z - y] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Par définition et en utilisant la décomposition précédente, on a pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = [x + y - z] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [2y - z] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2y - z \\ 2y - z \end{pmatrix}.$$

Ainsi, p est le projecteur sur F parallèlement à G.

(Q 2) Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}q\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}\lambda x+\lambda y-\lambda z+\mu x'+\mu y'-\mu y'\\ \lambda y+\mu y'\\ \lambda y+\mu y'\end{pmatrix}\\ &= \lambda q(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})+\mu q(\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}).\end{aligned}$$

Donc l'application q est linéaire. Pour montrer que q est un projecteur, il suffit de vérifier que $q\circ q=q$. Pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(q\circ q)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= q\left(\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(x+y-z)+y-y\\y\\y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}=q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$

(Q 3) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ tel que $q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors $\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&z\\y&=&0\end{array}\right.$ (puisque le système est de rang 2 et a donc un seul paramètre). Finalement, $\boxed{\ker(q)\text{ est engendré par le vecteur }\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.}$

(Q 4) Soit $u\in G\cap\ker(q)$. Alors, il existe $t,t'\in\mathbb{R}$ tels que $u=t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=t'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}t&=&t'\\t&=&0\\2t&=&t'\end{array}\right.\Leftrightarrow t=t'=0.$
Ainsi, $G\cap\ker(q)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(Q 5) Par le théorème du rang, on sait que $\dim\ker(q)+\dim Im(q)=\dim\mathbb{R}^3\Leftrightarrow\dim Im(q)=2$. Donc $\mathrm{Im}(q)$ et F ont la même dimension. Puis, calculons les images par q de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$q\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right);q\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right);$$

et

$$q\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ appartiennent à F et par propriété, $\mathrm{Im}(q)\subset F$. De plus, puisque ces deux espaces vectoriels ont la même dimension, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(q)=F}$.

(Q 6) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Alors, $p\circ q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=p\left(\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y-z+y-y\\2y-y\\2y-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-z\\y\\y\end{pmatrix}=q\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$. On a donc montré que $p\circ q=q$.

PARTIE C. (Q 1) On a $r^2=(p+q)\circ(p+q)=p^2+q^2+p\circ q+q\circ p=p+q+p+q=2r$. L'application r n'est donc pas un projecteur.

(Q 2) Soit $x \in \ker(r) \cap \ker(r - 2id)$, alors $r(x) = 0_E$ et $r(x) - 2x = 0_E$ et donc $x = 0_E$. Comme tout sous-espace vectoriel de E contient bien 0_E on a finalement l'égalité, $\underline{\ker(r) \cap \ker(r - 2id) = \{0_E\}}$

(Q 3) Soit $y \in \mathrm{Im}(r - 2id)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = r(x) - 2x$. Alors

$$r(y) = r(r(x) - 2x) = r^2(x) - 2r(x) = 2r(x) - 2r(x) = 0,$$

car r est linéaire. Donc $y \in \ker(r)$. Et finalement on a

$$\boxed{\mathrm{Im}(r - 2id) \subset \ker(r)}$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = r(x)$. Alors

$$(r-2id)(y) = r(y)-2y = r(r(x))-2r(x) = r^2(x)-2r(x) = 2r(x)-2r(x) = 0,$$

car r est linéaire. Donc $y \in \ker(r - 2id)$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2id)}$$

(Q 4) On a

$$\boxed{id = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}(r - 2id)}$$

(Q 5) Soit $x \in E$, alors $x = id(x)$ et, en utilisant la relation de la question précédente,

$$x = \frac{1}{2}r(x) - \frac{1}{2}(r - 2id)(x)$$

De plus $\frac{1}{2}r(x) \in \mathrm{Im}(r)$ et on a vu que $\mathrm{Im}(r) \subset \ker(r - 2id)$; donc $\frac{1}{2}r(x) \in \ker(r - 2id)$.
De même $\frac{1}{2}(r - 2id)(x) \in \mathrm{Im}(r - 2id)$, et on a vu que $\mathrm{Im}(r - 2id) \subset \ker(r)$; donc $\frac{1}{2}(r - 2id)(x) \in \ker(r)$.
Finalement on a bien décomposé tout vecteur de E comme une somme d'un vecteur de $\ker(r - 2id)$ et d'un vecteur de $\ker(r)$, c'est-à-dire $\underline{E = \ker(r) + \ker(r - 2id)}$. D'autre part, l'intersection est réduite au vecteur nul. Par propriété, $E = \ker(r) \oplus \ker(r - 2id)$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆