À rendre le mardi 20 Mai

Devoir en temps libre n° 10

EXERCICE

Le but de l'exercice est d'obtenir le développement asymptotique de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$ en $+\infty$.

1. **Recherche d'un équivalent** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

   On admet plus généralement l'existence de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^n}\,dt$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \sim_{+\infty} \frac{e^x}{x}$.

2. **Obtention du développement asymptotique.** On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^n}\,dt$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} - e + nF_{n+1}(x)$.

   (b) On pose, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $v_n(x) = (n-1)!F_n(x)$. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) - v_{n+1}(x) = (n-1)!\left(\dfrac{e^x}{x^n} - e\right)$.

   (c) En déduire $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\left(\frac{e^x}{x^k} - e\right) + (n+1)!\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+2}}\,dt$.

   (d) En déduire $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!e^x}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$.

Correction de l'exercice :

1. **Recherche d'un équivalent** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, si $x > 0$, l'intervalle $[1;\ x]$ (si $x > 1$) ou l'intervalle $[x;\ 1]$ (si $0 < x < 1$) sont inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle d'intégration étant définie, on en déduit l'existence de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Notons : $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^t}{t^3}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par quotient et $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(t) = \dfrac{e^t(t-3)}{t^5}$. On en déduit que φ est croissante sur $[3;\ +\infty[$.

   Ainsi, si $x > 3$, $\forall t \in [3;\ x]$, $\dfrac{e^t}{t^3} \leq \dfrac{e^x}{x^3}$. Par croissance de l'intégrale : $\forall x > 3$, $\displaystyle\int_3^x \frac{e^t}{t^3}\ dt \leq (x-3)\frac{e^x}{x^3}$. Ainsi, par Chasles et car l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle est positive, $\forall x > 3$, $0 \leq \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\ dt \leq \int_1^2 \frac{e^t}{t^3}\ dt + \frac{(x-3)e^x}{x^3}$. En multipliant l'inégalité par $\dfrac{x}{e^x} > 0$ on en déduit : $\forall x > 3,\ 0 \leq \dfrac{\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\, dt}{\frac{e^x}{x}} \leq C\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{(x-3)e^x}{x^2}$, avec $C = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{t^3}\ dt$. Nous avons $\dfrac{(x-3)e^x}{x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{e^x}{x}$. Or par croissances comparées $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$. On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-3)e^x}{x^2} = 0$, puis par opérations usuelles $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} C\frac{x}{e^x} + \frac{(x-3)e^x}{x^2} = 0$.

   Au final, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\, dt}{\frac{e^x}{x}} = 0$ ce qui prouve que : $\boxed{\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\ dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right).}$

   (c) Par intégration par parties : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\ dt$. En faisant à nouveau une intégration par parties nous en déduisons :
   $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x x\frac{e^t}{t^3}\ dt$. Or, d'(après la question précédente : $\displaystyle\int_1^x x\frac{e^t}{t^3}\ dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)$. De même : $\dfrac{e^x}{x^2} = o_{+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ et $2e = o_{+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$; On en déduit :
   $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt = \frac{e^x}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)$ ce qui prouve que : $\boxed{\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt \sim_{+\infty} \frac{e^x}{x}.}$

2. **Obtention du développement asymptotique.** On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^n}\ dt$.

   (a) Par intégration par parties : $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^n}\ dt = \left[\frac{e^t}{t^n}\right]_1^x + n\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}}\ dt$ ce qui prouve que : $\boxed{F_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} - e + nF_{n+1}(x).}$

   (b) En multipliant l'égalité précédente par $(n-1)!$, et puisque $n(n-1)! = n!$ on en déduit : $v_n(x) = (n-1)!\left(\dfrac{e^x}{x^n} - e\right) + v_{n+1}(x)$ donc : $\boxed{v_n(x) - v_{n+1}(x) = (n-1)!\left(\dfrac{e^x}{x^n} - e\right)}$.

   (c) Par télecopage : $v_1(x) - v_{n+2}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(v_k(x) - v_{k+1}(x)) = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\left(\frac{e^x}{x^k} - e\right)$. Or $v_1(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\ dt$ et $v_{n+2}(x) = (n+1)!\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+2}}\ dt$. On en déduit : $\boxed{\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\left(\frac{e^x}{x^k}-e\right)+(n+1)!\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+2}}\,dt.}$

(d) En procédant comme en 1c on montre que $\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+2}}\,dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$ donc $(n+1)!\int_1^x \frac{e^t}{t^{n+2}}\,dt = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$. De même $\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!e = o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$ en tant qu'expression constante en x. Or, par linéarité de la somme : $\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\left(\frac{e^x}{x^k}-e\right) = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\frac{e^x}{x^k} - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!e$ et par Chasles $\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)!\frac{e^x}{x^k} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)!\frac{e^x}{x^k} + n!\frac{e^x}{x^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)!\frac{e^x}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$.

On en déduit : $\boxed{\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!e^x}{x^k} + o_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right).}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆