

## PROBLÈME

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On note  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$  indexées par  $\mathbb{N}$ . Soit  $a, b, c$  trois scalaires fixés,  $a$  et  $c$  étant non-nuls (si  $c$  est nul, on aurait une suite linéaire d'ordre 1). On note

$$F = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E; \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \right\}.$$

**Le but du problème est de démontrer le théorème du cours donnant l'expression générale des suites de  $F$  que l'on rappelle ci-dessous.**

Soient  $b \in \mathbb{K}; a, c \in \mathbb{K}^*$  et soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

On appelle  $ar^2 + br + c = 0$  ( $E$ ) l'équation caractéristique.

- Si ( $E$ ) admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  alors il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ .
- Si ( $E$ ) admet une racine unique  $r_0$  alors il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + n\mu)r_0^n$ .

(Q 1) Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(Q 2) **Dimension de  $F$  ?**

Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  les suites de  $F$  telles que  $v_0 = 0, v_1 = 1$ , et  $w_0 = 1, w_1 = 0$ .

(Q a) Démontrer que la famille  $((v_n)_{n \geq 0}, (w_n)_{n \geq 0})$  est libre.

(Q b) Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $F$ , on pose  $\lambda = u_0$  et  $\mu = u_1$ . Démontrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  est combinaison linéaire de  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$ .

(Q c) En déduire que  $F$  est de dimension 2.

(Q 3) **Familles libres de suites ?**

(Q a) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires distincts. Démontrer que la famille  $((\alpha^n)_{n \geq 0}, (\beta^n)_{n \geq 0})$  est libre.

(Q b) Soit  $\alpha$  un scalaire non-nul. Démontrer que la famille  $((\alpha^n)_{n \geq 0}, (n\alpha^n)_{n \geq 0})$  est libre.

(Q 4) **Démonstration du théorème.**

On note ( $E$ ) l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , et  $\Delta$  son discriminant.

(Q a) Démontrer qu'une suite géométrique  $(q^n)_{n \geq 0}$  de raison non-nulle est élément de  $F$  si et seulement si  $q$  est solution de ( $E$ ).

(Q b) On suppose que  $\Delta$  est non-nul, et on note  $\lambda_1, \lambda_2$  les deux racines de ( $E$ ). En utilisant les questions précédentes, démontrer que  $F = \text{Vect} \left( (\lambda_1^n)_{n \geq 0}, (\lambda_2^n)_{n \geq 0} \right)$ .

(Q c) On suppose que  $\Delta$  est nul, et on note  $\lambda_0$  la racine ( $E$ ). Démontrer que la suite  $(n\lambda_0^n)_{n \geq 0}$  est élément de  $F$ . Démontrer ensuite que  $F = \text{Vect} \left( (\lambda_0^n)_{n \geq 0}, (n\lambda_0^n)_{n \geq 0} \right)$ .

**Correction du problème :**

(Q 1) On sait que :

- $F$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- La suite nulle appartient à  $F$  puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, a0 + b0 + c0 = 0$ .
- Enfin, soient  $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in F, \lambda \in \mathbb{K}$ . Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & a(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + b(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + c(\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda(a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n) + (a v_{n+2} + b v_{n+1} + c v_n) \\ &= \lambda 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda(u_n)_{n \geq 0} + (v_n)_{n \geq 0} \in F$ .Par propriété, on en déduit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .(Q 2) Soit  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites de  $F$  telles que  $v_0 = 0, v_1 = 1$ , et  $w_0 = 1, w_1 = 0$ .(Q a) Soient  $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(v_n) + \mu(w_n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ . Alors, en particulier,

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

en considérant  $n = 0$  et  $n = 1$ . Ainsi,la famille  $((v_n), (w_n))$  est libre.(Q b) On pose pour tout entier  $n : \mathcal{P}_n : u_n = \lambda w_n + \mu v_n$ .

- $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont vraies.
- Supposons que  $\mathcal{P}_n$  et  $\mathcal{P}_{n+1}$  sont vraies pour  $n \geq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{-b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \\ &= \frac{-b}{a}(\lambda w_{n+1} + \mu v_{n+1}) - \frac{c}{a}(\lambda w_n + \mu v_n) \\ &= \mu\left(\frac{-b}{a}v_{n+1} - \frac{c}{a}v_n\right) + \lambda\left(\frac{-b}{a}w_{n+1} - \frac{c}{a}w_n\right) \\ &= \lambda w_{n+2} + \mu v_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}_{n+2}$  est vraie.

iii. On sait que  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont vraies et que  $\forall n \geq 0, (\mathcal{P}_n; \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$ . Ainsi, par le théorème de récurrence à deux pas,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier  $n$  et

 $(u_n)_{n \geq 0}$  est combinaison linéaire de ces deux suites.(Q c) L'espace vectoriel  $F$  a une famille  $((v_n)_{n \geq 0}; (w_n)_{n \geq 0})$  libre et génératrice.Donc c'est une base et  $\dim F = 2$ .(Q 3) (Q a) Soient  $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(\alpha^n) + \mu(\beta^n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ . Alors, en particulier,

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda(\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

car  $(\alpha - \beta) \neq 0$ . Ainsi, la famille  $((\alpha^n), (\beta^n))$  est libre.(Q b)  $((\alpha^n), (n\alpha^n))$  est libre.Soient  $\lambda; \mu \in \mathbb{K}; \lambda(\alpha^n) + \mu(n\alpha^n) = O_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ . Alors, en particulier,

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha(\lambda + \mu) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

car  $(\alpha) \neq 0$ . Ainsi, la famille  $((\alpha^n), (n\alpha^n))$  est libre.(Q 4) **Démonstration du théorème.**(Q a) Soit  $q \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} (q^n)_{n \geq 0} \in F &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, q^n(aq^2 + bq^1 + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (aq^2 + bq^1 + c) = 0 \end{aligned}$$

car  $q \neq 0$ .Ainsi,  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$  si et seulement si  $q$  est solution de l'équation caractéristique.

(Q b) On sait que :

- i. les suites  $(\lambda_1^n)$  et  $(\lambda_2^n)$  sont des éléments de  $F$  et constituent une famille libre de  $F$
- ii.  $F$  est de dimension 2.

C'est donc une famille libre de taille maximale donc une base de  $F$ . Il s'agit en particulier d'une famille génératrice de cet espace. Ainsi,

$$F = \text{Vect}\left((\lambda_1^n), (\lambda_2^n)\right).$$

(Q c) Pour démontrer que cette suite est un élément de  $F$ , on l'injecte dans la relation définissant  $F$ . Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} & a(n+2)\lambda_0^{n+2} + b(n+1)\lambda_0^{n+1} + cn\lambda_0^n \\ = & \lambda_0^n \left( a(n+2)\lambda_0^2 + b(n+1)\lambda_0^1 + cn \right) \\ = & \lambda_0^n \left( n(a\lambda_0^2 + b\lambda_0^1 + c) + 2a\lambda_0^2 + b\lambda_0 \right) \\ = & \lambda_0^n (n0 + 0) \end{aligned}$$

car  $\lambda_0$  est solution de l'équation et est égale à  $\frac{-b}{2a}$ .

Ainsi,  $(n\lambda_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ .

On sait que :

- i. les suites  $(\lambda_0^n)$  et  $(n\lambda_0^n)$  sont des éléments de  $F$  et constituent une famille libre de  $F$
- ii.  $F$  est de dimension 2.

C'est donc une famille libre de taille maximale donc une base de  $F$ . Il s'agit en particulier d'une famille génératrice de cet espace. Ainsi,

$$F = \text{Vect}\left((\lambda_0^n), (n\lambda_0^n)\right).$$

\*\*\*  
FIN  
\*\*\*