Lycée Antoine Bourdelle & Lycée Déodat de Severac

Mathématiques
Concours blanc
2024-2025

PROBLÈME D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, ainsi que F.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La matrice transposée de toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée M^T.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel, c'est à dire pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2, AB \in \mathcal{A}$.

A. Question préliminaire.

A.1 Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1$. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.

Plus généralement on admettra dans la suite du problème que si $H_1, \dots, H_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que : $\forall k \in [\![1;\ r]\!],\ \dim(H_k) = n - 1$*, alors :* $\dim\left(\bigcap\limits_{k=1}^{r} H_i\right) \geq n - r.$

B. Un exemple de sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note dans cette partie, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ J(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $J(a, b, c)$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3$ et $\varphi(e_3) = e_1$.

B.1 Préciser les matrices J,J^2 et J^3.

B.2 Quel est le lien matriciel entre $J(a, b, c)$ et J et J^2 ?

B.3 Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B.4 Montrer que (I_3, J, J^2) est une base de $\mathcal{A}$.

B.5 Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(J - I_3)$. Faire de même avec $\mathrm{Ker}(J - jI_3)$ puis $\mathrm{Ker}(J - j^2 I_3)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

B.6 En déduire une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

B.7 En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et précisez la, telle que :

$$J(a, b, c) = P \begin{pmatrix} a + b + c & 0 & 0 \\ 0 & a + bj + cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a + bj^2 + cj \end{pmatrix} P^{-1}$$

C. Deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ supplémentaires.

C.1 On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Montrer que $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

C.2 Rappeler la formule du produit matriciel de deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_3$.

C.3 On fixe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \{0_3\}$ et pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A(B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Montrer que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

C.4 Calculer le rang de φ_A et en déduire que $\dim(\ker(\varphi_A)) = 8$.

C.5 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $G_F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, \forall A \in F,\ \mathrm{Tr}(A^T M) = 0\}$. Montrer que G_F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

C.6 Montrer que F et G_F sont en somme directe.

C.7 On note $\dim(F) = p \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\dim(G_F) \leq 9 - p$.

C.8 On note $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de F. Montrer que $M \in G_F \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;\ p]\!], \varphi_{A_k}(M) = 0$.

C.9 En déduire que $G_F = \bigcap\limits_{k=1}^{p} \ker(\varphi_{A_k})$ et enfin que $\dim(G_F) = 9 - p$.

D. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ de dimension 2 et $\mathcal{A}_F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/ \forall X \in F, AX \in F\}$.

D.1 Justifier l'existence de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ tel que $e_1 \in F$ et $e_2 \in F$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

D.2 Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

D.3 Montrer que $A \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d, e, f, g) \in \mathbb{R}^7 \,/ A = PNP^{-1}$ où $N = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & g \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.

D.4 En déduire la valeur de $\dim(\mathcal{A}_F)$.

D.5 De la même façon, donner sans démonstration la valeur de $\dim(\mathcal{A}_F)$ lorsque $\dim(F) = 1$.

E. On note $\mathcal{A}$ une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension $p < 9$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous espace vectoriel $G_{\mathcal{A}}$ défini dans la question C5. On note $(G_1, \cdots, G_r)$ une base de cet espace.

E.1 Justifier que $r = 9 - p$.

E.2 Soit l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à M associe M^T. Montrer que f est une bijection.

E.3 Soit l'espace vectoriel $\mathcal{B} = \{A^T /\ A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de même dimension que $\mathcal{A}$.

E.4 Soit $B \in \mathcal{B}$. Soit $G \in G_{\mathcal{A}}$. Montrer que $BG \in G_{\mathcal{A}}$.

E.5 Soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Soit $F = \mathrm{Vect}(G_1 X; \cdots; G_r X)$. En déduire que $\forall B \in \mathcal{B}, \forall Y \in F, BY \in F$.

E.6 En déduire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_F$ puis que $p \leq 7$.

Plus généralement, on montre qu'une sous algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension inférieure ou égale à $n^2 - n + 1$.

PROBLÈME D'ANALYSE

On admettra dans ce problème l'équivalent usuel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (\star)$$

On note $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

A. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que (P_n) converge vers un réel.

B. On considère la suite (I_n) telle que : $I_0 = 1$, $I_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2} I_n$.

B.1 On pose : $v_n = (n+1)I_nI_{n+1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2}v_n$.

B.2 Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1}(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

B.3 En déduire qu'il existe $\ell > 0$ tel que $I_nI_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

B.4 D'autre part, montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $I_nI_{n+1} = \frac{1}{(n+1)P_{n+1}}$.

C. On note $\alpha_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.

C.1 Montrer que $2n\ln(\cos(\frac{1}{n^{1/4}})) \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n} - \frac{1}{6} + o(1)$.

C.2 En déduire que $\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

D. On note φ une fonction continue, **décroissante**, sur l'intervalle $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt$.

D.1 En remarquant que $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_n) = \cos(\alpha_n)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\ dt \leq \frac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n)$.

D.2 En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ puis, en utilisant $(\star)$, que $\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

D.3 Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], |\varphi(t)| \leq M$.

D.4 En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

D.5 Montrer que

$$\varphi(\frac{\pi}{2})\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\ dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt \leq \varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt$$

D.6 De l'ensemble de ces questions, en déduire que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

E. On fixe $p \in \mathbb{N}$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(p) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

E.1 Soit $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n(p) = e^{-n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

E.2 En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(p)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$$

E.3 Exprimer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t}\sin^{2p}(t)\ dt$ à l'aide du changement de variable $u = \pi - t$.

E.4 En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi/2} (e^{-t}+e^{t-\pi})\sin^{2p}(t)\ dt$$

E.5 Soit $\varphi : t \mapsto e^{-t}+e^{t-\pi}$ définie sur $[0;\pi/2]$. Montrer que φ est décroissante.

E.6 On note $A(p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p)$ dans la suite du problème. En déduire, $A(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$.

F. **F.1** Montrer que $A(p) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

F.2 Calculer $A(0)$.

F.3 En vous aidant d'intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p+2}(t)\ dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

F.4 En déduire que pour tout entier naturel p, $A(p+1) = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{1+(2p+2)^2}A(p)$.

F.5 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(p) = I_{2p}$.

G. On montre de la même façon l'existence de $B(p) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p+1}(t)\ dt$ et on obtient de façon similaire que $B(p) = I_{2p+1}$ et $B(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$. En vous aidant des questions précédentes que vous prendrez soin de préciser, montrer finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$.

On donc montré la formule : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$.

Lycée Antoine Bourdelle & Lycée Déodat de Severac

Mathématiques
Concours blanc

2024-2025

PROBLÈME D'ALGÈBRE LINÉAIRE

A. Question préliminaire.

A.1 Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1$. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.

On utilise la formule de Grassmann :

$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2) \Leftrightarrow \dim(H_1 + H_2) = n - 1 + n - 1 - \dim(H_1 \cap H_2)$

Ainsi

$$\dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2)$$

Or $H_1 + H_2$ est un sous espace vectoriel de E qui est de dimension n. Donc sa dimension est inférieure ou égale à n. Ainsi

$\dim(H_1 \cap H_2) \geq 2n - 2 - n = n - 2$.

Plus généralement on admettra dans la suite du problème que si $H_1, \dots, H_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que : $\forall k \in [\![1;\ r]\!],\ \dim(H_k) = n - 1$, alors : $\dim\left(\bigcap_{k=1}^{r} H_i\right) \geq n - r$.

B. Un exemple de sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note dans cette partie, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ J(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $J(a, b, c)$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3$ et $\varphi(e_3) = e_1$.

B.1 Préciser les matrices J,J^2 et J^3.
On a

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Donc $\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = I_3}$.

B.2 Quel est le lien matriciel entre $J(a, b, c)$ et J et J^2 ?

Il est immédiat que

$$J(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2$$

B.3 Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- On sait que $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Soit $A = J(a,b,c)$ et $B = J(a',b',c')$ deux éléments de $\mathcal{A}$. Donc

$$\begin{aligned} AB &= (aI_3 + bJ + cJ^2)(a'I_3 + b'J + c'J^2) \\ &= aa'I_3 + ab'J + ac'J^2 + ba'J + bb'J^2 + bc'I_3 + ca'J^2 + cb'I_3 + cc'J \\ &= (aa' + bc' + cb')I_3 + (ab' + ba' + cc')J + (ac' + bb' + ca')J^2 \\ &= BA \end{aligned}$$

Cela montre que $\mathcal{A}$ est stable par produit matriciel et est commutative.

Donc $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B.4 Montrer que (I_3, J, J^2) est une base de $\mathcal{A}$.

D'après la question B2, on sait que cette famille (I_3, J, J^2) est génératrice de $\mathcal{A}$. De plus, soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2 = 0_3 \Leftrightarrow J(\alpha, \beta, \gamma) = 0_3 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc libre.

Par définition, la famille (I_3, J, J^2) est une base de $\mathcal{A}$.

B.5 Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(J - I_3)$. Faire de même avec $\mathrm{Ker}(J - jI_3)$ puis $\mathrm{Ker}(J - j^2 I_3)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- On a $\mathrm{Ker}(J - I_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$. La famille $(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ est génératrice de ce noyau, libre car constitué d'un seul vecteur non nul. C'est une base de ce noyau et il est de dimension 1.
- On a $\mathrm{Ker}(J - jI_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix})$. La famille $(\begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix})$ est génératrice de ce noyau, libre car constitué d'un seul vecteur non nul. C'est une base de ce noyau et il est de dimension 1.
- On a $\mathrm{Ker}(J - j^2 I_3) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix})$. La famille $(\begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix})$ est génératrice de ce noyau, libre car constitué d'un seul vecteur non nul. C'est une base de ce noyau et il est de dimension 1.

B.6 En déduire une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$.

La famille $(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix})$ est une famille libre :

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} j^2\alpha + j\beta + \gamma &=& 0 \\ j\alpha + j^2\beta + \gamma &=& 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma &=& 0 \\ (j^2-1)\alpha + (j-1)\beta &=& 0 \\ (j-1)\alpha + (j^2-1)\beta &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma &=& 0 \\ (j^2-1)\alpha + (j-1)\beta &=& 0 \\ \alpha &=& -(j+1)\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Cette famille est libre et de cardinal maximal puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de φ dans cette base est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$
puisque
$$J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, J\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}, J\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} = j^2\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

B.7 En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et précisez la, telle que :
$$J(a,b,c) = P\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}P^{-1}$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Par théorème, on sait que
$$J = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$
Donc
$$J(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2 = aI_3 + bP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1} + cP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$= aPI_3P^{-1} + bP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}P^{-1} + cP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}P^{-1}$$

C. Deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ supplémentaires.

C.1 On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Montrer que $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors,
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + (\alpha a_{22} + \beta b_{22}) + (\alpha a_{33} + \beta b_{33}) \\ &= \alpha(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \beta(b_{11} + b_{22} + b_{33}) \\ &= \alpha\mathrm{Tr}(A) + \beta\mathrm{Tr}(B) \end{aligned}$$

Cela montre que Tr est une application linéaire.

C.2 Rappeler la formule du produit matriciel de deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_3$.

La formule du produit matriciel est

$$\forall (i,j) \in \{1;\cdots;n\}^2, [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors

$$[A^T A]_{ii} = \sum_{k=1}^{3} [A^T]_{ik}[A]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ki}[A]_{ki}$$

par définition de la transposée d'une matrice. Ainsi,

$$[A^T A]_{ii} = \sum_{k=1}^{3} \Big([A]_{ki}\Big)^2$$

Donc,

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{3} [A^T A]_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Big([A]_{ki}\Big)^2$$

Finalement

$$\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in \{1;2;3\}, \Big([A]_{ki}\Big)^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0_3$$

puisque une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les nombres sont nuls.

On a donc montré si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $\mathrm{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_3$.

C.3 On fixe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \{0_3\}$ et pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A(B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Montrer que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (B_1,B_2) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donc

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\alpha B_1 + \beta B_2) &= \mathrm{Tr}(A^T[\alpha B_1 + \beta B_2]) \\
&= \mathrm{Tr}(\alpha A^T B_1 + \beta A^T B_2) \\
&= \alpha \mathrm{Tr}(A^T B_1) + \beta \mathrm{Tr}(A^T B_2) \text{ puisque } \mathrm{Tr} \text{ est linéaire} \\
&= \alpha\varphi_A(B_1) + \beta\varphi_A(B_2)
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

C.4 Calculer le rang de φ_A et en déduire que $\dim(\ker(\varphi_A)) = 8$.

- On a $\mathrm{Im}(\varphi_A) \subset \mathbb{R}$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi) \leq 1$. Puisque φ_A n'est pas l'application nulle, par exemple $(\varphi_A)(A) = \mathrm{Tr}(A^T A) \neq 0$ par la question C2, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A) = 1$.

Ainsi, $rg(\varphi_A) = 1$.

- Par le théorème du rang,

$$\dim(\ker(\varphi_A)) + rg(\varphi_A) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \dim(\ker(\varphi_A)) + 1 = 9 \Leftrightarrow \boxed{\dim(\ker(\varphi_A)) = 8}.$$

C.5 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $G_F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, \forall A \in F,\ \mathrm{Tr}(A^T M) = 0\}$. Montrer que G_F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $G_F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- $0_{33} \in G_F$ puisque $\forall A \in F, \mathrm{Tr}(A^T 0_{33}) = \mathrm{Tr}(0_{33}) = 0$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (M_1, M_2) \in (G_F)^2$. Alors $\forall A \in F$

$$\mathrm{Tr}(A^T(\alpha M_1 + \beta M_2)) = \alpha \mathrm{Tr}(A^T M_1) + \beta \mathrm{Tr}(A^T M_2)$$

puisque Tr est linéaire. Donc

$$\mathrm{Tr}(A^T(\alpha M_1 + \beta M_2)) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0.$$

Ainsi, $\alpha M_1 + \beta M_2 \in G_F$.

Par définition, G_F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

C.6 Montrer que F et G_F sont en somme directe.

Soit $M \in F \cap G_F \Leftrightarrow M \in F$ et $\forall A \in F, \mathrm{Tr}(A^T M) = 0$. Puisque $M \in F$, on a donc $\mathrm{Tr}(M^T M) = 0$. Par la question C2, $M = 0_{33}$.

Ainsi, $F \cap G_F = \{0_{33}\}$ et les espaces sont donc en somme directe.

C.7 On note $\dim(F) = p \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\dim(G_F) \leq 9 - p$.
Puisque les espaces sont en somme directe,

$$\dim(F + G_F) = \dim(F) + \dim(G_F)$$

Ainsi

$$\dim(G_F) = \dim(F + G_F) - p \leq 9 - p$$

puisque $F + G$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension 9.

C.8 On note $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de F. Montrer que $M \in G_F \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;\ p]\!], \varphi_{A_k}(M) = 0$.

Procédons par double implication.

- Si $M \in G_F$ alors $\forall A \in F, \mathrm{Tr}(A^T M) = 0$. Puisque les matrices $(A_1, \ldots, A_r)$ appartiennent à F, on en déduit que $\forall k \in \{1; \cdots; p\}, \mathrm{Tr}(A_k^T M) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{A_k}(M) = 0$.

- Supposons que $\forall k \in [\![1;\ p]\!], \varphi_{A_k}(M) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A_k^T M) = 0$. Soit $A \in F$. Donc il existe un unique $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k A_k$. Calculons

$$\mathrm{Tr}(A^T M) = \mathrm{Tr}((\sum_{k=1}^{p} \alpha_k A_k)^T M) = \mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k A_k^T M) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathrm{Tr}(A_k^T M)$$

par linéarité de la transposition et de la trace. Par hypothèse,

$$\mathrm{Tr}(A^T M) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \times 0 = 0$$

Ainsi, $M \in G_F$.

On a montré que $M \in G_F \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;\ p]\!], \varphi_{A_k}(M) = 0$.

C.9 En déduire que $G_F = \cap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_{A_k})$ et enfin que $\dim(G_F) = 9 - p$.
On en déduit que $M \in G_F \Leftrightarrow M \in \cap_{k=1}^{p} \ker(\varphi_{A_k})$. Ainsi, $G_F = \cap_{k=1}^{r} \ker(\varphi_{A_k})$. Or pour tout $k \in \{1; \cdots; p\}, A_k \neq 0_3$. En effet, la famille $(A_1, \cdots, A_p)$ est une base, donc une famille libre. Elle ne peut donc pas contenir de la matrice nulle.
Par la question C4, $\dim(\ker(\varphi_{A_k})) = 8 = 9 - 1$. Par le résultat du préliminaire,

$$\dim(G_F) \geq 9 - p.$$

Finalement, $\dim(G_F) = 9 - p$

D. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ de dimension 2 et $\mathcal{A}_F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ /\forall X \in F, AX \in F\}$.

D.1 Justifier l'existence de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ tel que $e_1 \in F$ et $e_2 \in F$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

Puisque F est de dimension 2, une base de F est de cardinal 2. Soit (e_1, e_2) une base de F. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, par le théorème de la base incomplète, il existe e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

D.2 Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\mathcal{A}_F$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
  - $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
  - On a $\forall X \in F, 0_3 X = 0_{31} \in F$ puisque F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.
  - Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (A_1, A_2) \in (\mathcal{A}_F)^2$. Soit $X \in F$. Alors $(\alpha A_1 + \beta A_2)X = \alpha A_1 X + \beta A_2 X$. Or $A_1 X \in F, A_2 X \in F$ puisque $A_1 \in \mathcal{A}_F, A_2 \in \mathcal{A}_F$. Puisque F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, on en déduit que $(\alpha A_1 + \beta A_2)X \in F$. Ainsi, $(\alpha A_1 + \beta A_2) \in \mathcal{A}_F$.
- Montrons que $\mathcal{A}_F$ est stable par produit.
Soit $(A, B) \in (\mathcal{A}_F)^2$. Alors, soit $X \in F$. On a $ABX = A(BX)$. Or $BX \in F$ puisque $B \in \mathcal{A}_F$. Ainsi, $A(BX) \in \mathcal{F}$ puisque $A \in \mathcal{A}_F$. Cela montre que $AB \in \mathcal{A}_F$.

D.3 Montrer que $A \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow \exists (a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{R}^7 \ /A = PNP^{-1}$ où $N = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & g \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.

Soit $A \in \mathcal{A}_F$. Donc $\forall X \in F, AX \in F$. Prenons la base (e_1, e_2, e_3) définie dans la question D1. Rappelons que e_1 et e_2 sont des éléments de F. Ainsi $Ae_1 \in F \Leftrightarrow \exists (a,c) \in \mathbb{R}^2, Ae_1 = ae_1 + ce_2$. De même, $Ae_2 \in F \Leftrightarrow \exists (b,d) \in \mathbb{R}^2, Ae_2 = be_1 + de_2$. Enfin, $\exists (e,g,h) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ae_3 = ee_1 + ge_2 + he_3$. Ainsi, par la formule de changement de bases, $A \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow \exists (a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{R}^7 \ /A = PNP^{-1}$ où $N = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & g \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.

D.4 En déduire la valeur de $\dim(\mathcal{A}_F)$.

Ainsi

$$A \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow A = aPE_{11}P^{-1} + bPE_{12}P^{-1} + ePE_{13}P^{-1} + cPE_{21}P^{-1} + dPE_{22}P^{-1} + gPE_{23}P^{-1} + hPE_{33}P^{-1}$$

Donc, la famille $(PE_{11}P^{-1}; PE_{12}P^{-1}; PE_{13}P^{-1}; PE_{21}P^{-1}; PE_{22}P^{-1}; PE_{23}P^{-1}; PE_{33}P^{-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_F$. Elle est libre : $\forall (a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{R}^7$,

$$aPE_{11}P^{-1} + bPE_{12}P^{-1} + ePE_{13}P^{-1} + cPE_{21}P^{-1} + dPE_{22}P^{-1} + gPE_{23}P^{-1} + hPE_{33}P^{-1} = 0_{33}$$

$$\Leftrightarrow aE_{11} + bE_{12} + eE_{13} + cE_{21} + dE_{22} + gE_{23} + hE_{33} = P^{-1}0_{33}P = 0_{33} \Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = g = 0$$

Cette famille est donc une base de $\mathcal{A}_F$ qui est donc de dimension 7.

D.5 De la même façon, donner sans démonstration la valeur de $\dim(\mathcal{A}_F)$ lorsque $\dim(F) = 1$.

De même, on obtient $\dim(\mathcal{A}_F) = 7$ lorsque $\dim(F) = 1$.

E. On note $\mathcal{A}$ une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension $p < 9$. On considère le sous espace vectoriel $G_{\mathcal{A}}$ défini dans la question C5. On note $(G_1, \cdots, G_r)$ une base de cet espace.

E.1 Justifier que $r = 9 - p$.
L'espace $\mathcal{A}$ est de dimension p et $G_{\mathcal{A}}$ est de dimension r puisqu'une de ces bases est de cardinal r. Par la question C9, on en déduit que $r = 9 - p$.

E.2 Soit l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à M associe M^T. Montrer que f est une bijection.

Soit $M \in \ker(f) \Leftrightarrow M^T = 0_{33} \Leftrightarrow M = 0_{33}^T = 0_{33}$. Donc $\ker(f) = \{0_{33}\}$.

L'endomorphisme f est donc injective sur un espace de dimension finie. Par théorème, c'est une bijection.

E.3 Soit l'espace vectoriel $\mathcal{B} = \{A^T /\ A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de même dimension que $\mathcal{A}$.

$\mathcal{B}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donc $0_{33} \in \mathcal{A}$. Or $0_{33} = 0_{33}^T$. Ainsi, $0_{33} \in \mathcal{B}$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (A^T, B^T) \in \mathcal{B}$, donc $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Ainsi, $\alpha A^T + \beta B^T = (\alpha A + \beta B)^T$. Or $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, $\alpha A^T + \beta B^T \in \mathcal{B}$.

Soit $(A^T, B^T) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}, (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Alors $A^T B^T = (BA)^T$. Or $BA \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est une sous algèbre et que A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$. Ainsi, $A^T B^T \in \mathcal{B}$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus : $f : M \mapsto M^T$ étant une bijection de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ver $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par restriction : $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une application linéaire bijective. Par propriété :

$\dim(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{A})$).

E.4 Soit $B \in \mathcal{B}$. Soit $G \in G_{\mathcal{A}}$. Montrer que $BG \in G_{\mathcal{A}}$.
D'une part, $BG \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puis, soit $A \in \mathcal{A}$. Calculons $\mathrm{Tr}(A^T BG)$. On sait que il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $B = A'^T$. Donc

$$\mathrm{Tr}(A^T BG) = \mathrm{Tr}(A^T A'^T G) = \mathrm{Tr}((A'A)^T G)$$

Or $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $A'A \in \mathcal{A}$. Puisque$G \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, on en déduit que $\mathrm{Tr}((A'A)^T G) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(A^T BG) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{A}$, on en déduit que $BG \in G_{\mathcal{A}}$.

E.5 Soit $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Soit $F = \mathrm{Vect}(G_1 X; \cdots; G_r X)$. En déduire que $\forall B \in \mathcal{B}, \forall Y \in F, BY \in \mathcal{F}$.

Soit $B \in \mathcal{B}$. Soit $Y \in F$. Alors, $\exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $Y = \sum_{k=1}^r \alpha_k G_k X$. Donc $BY = \sum_{k=1}^r \alpha_k B G_k X$. Or $BG_k \in G_{\mathcal{A}}$ par la question précédente. Puisque $(G_1, \cdots, G_r)$ est une base de $G_{\mathcal{A}}$, on en déduit que il existe $(\beta_{k,1}, \cdots, \beta_{k,r}) \in \mathbb{R}^r$ tel que $BG_k = \sum_{i=1}^r \beta_{k,i} G_i$. Donc

$$BY = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^r \alpha_k \beta_{k,i} G_i X \in F.$$

E.6 En déduire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_F$ puis que $p \leq 7$.

Soit $B \in \mathcal{B}$. Alors d'après la question précédente : $\forall Y \in F, BY \in \mathcal{F}$. Or par définition : $\mathcal{A}_F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) /\forall X \in F, AX \in F\}$. Par conséquent $B \in \mathcal{A}_F$.

On en déduit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_F$.

Nous savons que $p < 9$. Or $r = 9 - p$. Ainsi $r \geq 1$ ce qui prouve que $\dim(F) \geq 1$. On distingue alors deux cas :

— $\dim(F) = 1$ ou $\dim(F) = 2$.

Comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_F$ on en déduit : $\dim(B) \leq \dim(\mathcal{A}_F)$. Or, $\dim(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{A})$ d'après E3 et $\dim(\mathcal{A}_F) \leq 7$ d'après D. Par conséquent : $p \leq 7$.

— $\dim(F) = 3$. Or, $(G_1X, \ldots, G_rX)$ est une famille génératrice de F par définition et toute famille génératrice de F a plus de 3 éléments. Ainsi $r \geq 3$. Or $p = 9 - r$ donc $p \leq 6$.

Au final, quelle que soit la situation $p \leq 7$.

Plus généralement, on montre qu'une sous algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est de dimension inférieure ou égale à** $n^2 - n + 1$.

PROBLÈME D'ANALYSE

On admettra dans ce problème l'équivalent usuel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (\star)$$

On note $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

A. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que (P_n) converge vers un réel.

On a :

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$
la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, converge.

Le nombre P_n étant strictement positif en tant que produit de nombres qui le sont, on a

$$\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

Or la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge par ce qui précède. Donc la suite $(\ln(P_n))_{n\geq 1}$ converge.

Puisque $\exp$ est continue, la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge donc.

B. On considère la suite (I_n) telle que : $I_0 = 1$, $I_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2} I_n$.

B.1 On pose : $v_n = (n+1)I_nI_{n+1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2} v_n$.

Soit $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \times \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2} I_n \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)}{1+(n+2)^2} I_nI_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2} v_n \end{aligned}$$

B.2 Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

Calculons

$$\begin{aligned}
\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \ln(\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2}v_n) - \ln(v_n) \\
&= \ln(\frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2}) + \cancel{\ln(v_n)} - \cancel{\ln(v_n)} \\
&= -\ln(\frac{1+(n+2)^2}{(n+2)^2}) = -\ln(1+\tfrac{1}{(n+2)^2}) \\
&\sim -\tfrac{1}{(n+2)^2} \\
&\sim -\tfrac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

On a :

$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \sim \frac{-1}{n^2}$
la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Par le théorème de comparaison pour les séries à termes négatifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge.

B.3 En déduire qu'il existe $\ell > 0$ tel que $I_nI_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

Par le théorème sur les séries télescopiques, la suite $(\ln(v_n))_{n\geq 1}$ converge vers un réel a. Par continuité de $\exp$, la suite (v_n) converge vers $\ell = e^a > 0$. Ainsi, $I_nI_{n+1} = fracv_nn+1 \sim_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n}$.

B.4 D'autre part, montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $I_nI_{n+1} = \frac{1}{(n+1)P_{n+1}.}$

- Initialisation. D'une part, $I_0I_1 = \frac{1}{2}$ et d'autre part, $\frac{1}{(0+1)P_1} = \frac{1}{2}$.
- Hérédité. Supposons que $I_nI_{n+1} = \frac{1}{(n+1)P_{n+1}}$ est vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors

$$I_{n+1}I_{n+2} = I_{n+1} \times \frac{(n+2)(n+1)}{1+(n+2)^2} I_n = \frac{(n+2)\cancel{(n+1)}}{1+(n+2)^2} \frac{1}{\cancel{(n+1)}P_{n+1}}$$

par hypothèse. Donc

$$\begin{aligned}
I_{n+1}I_{n+2} &= \frac{(n+2)}{1+(n+2)^2}\tfrac{1}{P_{n+1}} \\
&= \tfrac{1}{(n+2)} \times \frac{(n+2)^2}{1+(n+2)^2}\tfrac{1}{P_{n+1}} \\
&= \tfrac{1}{(n+2)} \times \tfrac{1}{1+\frac{1}{(n+2)^2}} \times \tfrac{1}{P_{n+1}} \\
&= \tfrac{1}{(n+2)P_{n+2}}
\end{aligned}$$

- Par le théorème de récurrence, le résultat est démontré.

C. On note $\alpha_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.

C.1 Montre que $2n\ln(\cos(\frac{1}{n^{1/4}})) \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n}-\frac{1}{6}+o(1)$.

$$2n\ln(\cos(\tfrac{1}{n^{1/4}})) \underset{n\to+\infty}{=} 2n\ln(1-\tfrac{1}{2\sqrt{n}}+\tfrac{1}{24n}+o(\tfrac{1}{n})$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} 2n\Big([-\tfrac{1}{2\sqrt{n}}+\tfrac{1}{24n}]-\tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{2\sqrt{n}}]^2+o(\tfrac{1}{n}\Big)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{n}-\tfrac{1}{6}+o(1)$$

C.2 En déduire que $\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} = e^{\ln(\big(\cos(\alpha_n)\big)^{2n})} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\sqrt{n}-\frac{1}{6}+o(1)}$$

Or, par croissance comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}=0$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}e^{-\sqrt{n}-\frac{1}{6}+o(1)}=0$ et par définition :

$$\Big(\cos(\alpha_n)\Big)^{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

D. On note φ une fonction continue, **décroissante**, sur l'intervalle $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ telle que $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$. On note $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt$.

D.1 En remarquant que $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)=\cos(\alpha_n)$, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, 0\leq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\ dt \leq \dfrac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n)$.

La fonction $\sin^{2n}$ est croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}-\alpha_n]$. Ainsi

$$\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}-\alpha_n], 0\leq \sin^{2n}(t)\leq \sin^{2n}(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)=\cos^{2n}(\alpha_n).$$

Par croissance de l'intégrale et positivité

$$0\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}\sin^{2n}(t)\ dt \leq \cos^{2n}(\alpha_n)\int_0^{\pi/2-\alpha_n} 1\,dt \leq (\frac{\pi}{2}-\alpha_n)\cos^{2n}(\alpha_n)\leq \frac{\pi}{2}\cos^{2n}(\alpha_n).$$

D.2 En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}\sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ puis, en utilisant $(\star)$, que $\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
Par C2, $\cos^{2n}(\alpha_n)=o(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}\varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Puis, par $(\star)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Par Chasles :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}\sin^{2n}(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(t)\,dt$$

Donc
$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}) - o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$
Ainsi
$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

D.3 Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], |\varphi(t)| \leq M.$

La fonction φ est continue sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$. Par le théorème des bornes atteintes (ou Weierstrass), la fonction φ est bornée et atteint ses bornes.

Donc il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], |\varphi(t)| \leq M.$

D.4 En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

On a,par l'inégalité triangulaire puis par croissance de l'intégrale,
$$|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt| \leq M\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\;dt$$
Puisque $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \sin^{2n}(t)\;dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

D.5 Montrer que
$$\varphi(\frac{\pi}{2})\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\;dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt \leq \varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt$$
Puisque φ est décroissante,
$$\forall t \in [\frac{\pi}{2}-\alpha_n; \frac{\pi}{2}], \varphi(\frac{\pi}{2}) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n).$$
Or $\sin^{2n}$ est positif, donc
$$\varphi(\frac{\pi}{2})\sin^{2n}(t) \leq \varphi(t)\sin^{2n}(t) \leq \varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)\sin^{2n}(t).$$
Par croissance de l'intégrale,
$$\varphi(\frac{\pi}{2})\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\;dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt \leq \varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n)\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt$$

D.6 De l'ensemble de ces questions, en déduire que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
Puisque $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$ par hypothèse et que φ est continue, que $\frac{\pi}{2}-\alpha_n \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$, on en déduit que
$$\varphi(\frac{\pi}{2}-\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2}).$$
Puisque $\sin^{2n} > 0$ et est une fonction continue sur $[\frac{\pi}{2}-\alpha_n; \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt \neq 0$.
Donc, par encadrement : $\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\;dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2})\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt$. Or :

$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt \sim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Enfin,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha_n} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\sqrt{n}}) + \varphi(\frac{\pi}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Finalement,

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin^{2n}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(\frac{\pi}{2})\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}$$

E. On fixe $p \in \mathbb{N}$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(p) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

E.1 Soit $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n(p) = e^{-n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

On effectue le changement de variables $t = n\pi + x = \varphi(x)$. Alors cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\frac{dt}{dx} = 1$. Ainsi,

$$u_n(p) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt = \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+x)}\sin^{2p}(n\pi+x))\ dx = \int_0^{\pi} e^{-(n\pi+x)}\Big((-1)^n\Big)^{2p}\sin^{2p}(x)\ dx$$

$$= e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$$

E.2 En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(p)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$$

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$ est non nulle puisque $t \mapsto e^{-t}\sin^{2p}(t)$ est continue et non identiquement nulle sur $[0;\pi]$. Ainsi

$u_n(p) \sim_{n\to+\infty} e^{-n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$
La série $\sum_{n\geq 0} e^{-n\pi}$ est une série géométrique de raison $e^{-\pi} \in]0;1[$.
Par théorème, c'est une série convergente.

Par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(p)$ converge.

De plus, par théorème,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt}$$

E.3 Exprimer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{t}\sin^{2p}(t)\ dt$ à l'aide du changement de variable $u = \pi - t$.

En effectuant le changement de variables $u = \pi - t$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-[\pi-u]}\sin^{2p}(\pi-u)\times(-1)\,du = \int_0^{\pi/2} e^{u-\pi}\sin^{2p}(u)\,du$$

E.4 En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi/2}\left(e^{-t}+e^{t-\pi}\right)\sin^{2p}(t)\ dt$$

Par Chasles et la question précédente, le résultat est immédiat :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi/2}\left(e^{-t}+e^{t-\pi}\right)\sin^{2p}(t)\ dt$$

E.5 Soit $\phi : t \mapsto e^{-t} + e^{t-\pi}$ définie sur $[0;\pi/2]$. Montrer que ϕ est décroissante.

La fonction ϕ est dérivable sur $[0;\pi/2]$ et $\forall t \in [0;\pi/2], \varphi'(t) = -e^{-t} + e^{t-\pi}$. Donc

$$\varphi'(t) \leq 0 \Leftrightarrow -e^{-t} + e^{t-\pi} \leq 0 \Leftrightarrow e^{t-\pi} \leq e^{-t} \Leftrightarrow t - \pi \leq -t \Leftrightarrow t \leq \frac{\pi}{2}$$

puisque $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, φ est décroissante.

E.6 On note $A(p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(p)$ dans la suite du problème. En déduire, $A(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$.

On a

$$A(p) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin^{2p}(t)\,dt$$

On utilise le résultat de la question **??**, étant donnée que φ est décroissante et continue sur $[0;\pi/2$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 2e^{-\pi/2} \neq 0$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin^{2p}(t)\ dt \underset{p\to+\infty}{\sim} \varphi(\pi/2)\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

De plus $\frac{1}{1-e^{-\pi}} \times \varphi(\pi/2) = \frac{2e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}} = \frac{2e^{-\pi/2}}{e^{-\pi/2}(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\frac{\pi}{2})}$.

Ainsi, $A(p) \sim_{p\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$.

F. F.1 Montrer que $A(p) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

On a, par Chasles,

$$\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(p)$$

Or $A(p)$ est la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_k(p)$. Donc, par définition, $A(p) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$

F.2 Calculer $A(0)$.

On a $\int_0^{n\pi} e^{-t}\ dt = [-e^{-t}]_0^n = 1 - e^{-n}$.

Ainsi, $A(0) = 1$.

F.3 En vous aidant d'intégration par parties, exprimer $\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p+2}(t)\ dt$ en fonction de $\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\ dt$.

On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & e^{-t} \\ v(t) & = & \sin^{2p+2}(t) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & -e^{-t} \\ v'(t) & = & (2p+2)\cos(t)\sin^{2p+1}(t) \end{array}\right.$$

Ces fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^{n} e^{-t}\sin^{2p+2}(t)\ dt &= \Big[-e^{-t}\sin^{2p+2}(t)\big]_0^{n\pi} + \textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}(2p+2)\cos(t)\sin^{2p+1}(t)\,dt \\
&= (2p+2)\textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\cos(t)\sin^{2p+1}(t)\,dt \\
&= (2p+2)\Big(\Big[-e^{-t}\cos(t)\sin^{2p+1}(t)\big]_0^{n\pi} + \\
&\qquad \textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\Big(-\sin(t)\sin^{2p+1}(t) + \cos(t)(2p+1)\cos(t)\sin^{2p}(t)\,dt\Big)\Big) \\
&= (2p+2)\textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\Big(-\sin^{2p+2}(t) + (1-\sin^2(t))(2p+1)\sin^{2p}(t)\,dt\Big) \\
&= (2p+2)(2p+1)\textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p}(t)\,dt - (2p+2)^2\textstyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\sin^{2p+2}(t)\,dt
\end{aligned}$$

F.4 En déduire que pour tout entier naturel p, $A(p+1) = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{1+(2p+2)^2}A(p)$.

Passons à la limite quand n tend vers $+\infty$. On a donc

$$\begin{array}{rl}
& A(p+1) = (2p+2)(2p+1)A(p) - (2p+2)^2 A(p+1) \\
\Leftrightarrow & (1+(2p+2)^2)A(p+1) = (2p+2)(2p+1)A(p) \\
\Leftrightarrow & A(p+1) = \frac{(2p+2)(2p+1)}{1+(2p+2)^2}A(p).
\end{array}$$

F.5 Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $A(p) = I_{2p}$.

On remarque que

$$A(p+1) = \frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}A(p).$$

Par télescopage

$$A(p) = \frac{I_{2p}}{I_0}A(0)$$

Or $A(0) = 1$ et $I_0 = 1$. Ainsi

$\forall p \in \mathbb{N}, A(p) = I_{2p}$.

G. On montre de la même façon l'existence de $B(p) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} e^{-t} \sin^{(2p+1)}(t)\, dt$ et on obtient de façon similaire que $B(p) = I_{2p+1}$ et $B(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. En vous aidant des questions précédentes que vous prendrez soin de préciser, montrer finalement que $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$.

On sait que $I_n I_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n}$ et que $I_n I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)P_{n+1}}$. Donc, $P_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \ell$ et ainsi, par théorème, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell > 0$. Donc $P_n \sim_{n\to+\infty} P_{n+1}$. Or

$$I_{2p} I_{2p+1} = A(p)B(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \times \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\mathrm{sh}\,(\pi)} \frac{\pi}{p}$$

Finalement, Ainsi,

$$\frac{1}{2pP_{2p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\mathrm{sh}\,(\pi)} \frac{\pi}{p} \Leftrightarrow P_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{2\mathrm{sh}\,(\pi)}{2p} \frac{p}{\pi} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{sh}\,(\pi)}{\pi}$$

Finalement, la suite (P_n), ayant la même limite que sa suite extraite par théorème, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$.

On donc montré la formule : $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$.