

**PROGRAMME DE COLLES 19**

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

### Questions de cours

1. Énoncé de :
  - la relation de divisibilité;
  - la propriété de division euclidienne.

Montrer que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$  est  $P(\alpha)$ .
2. Montrer que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est racine d'un polynôme à coefficient réel alors  $\bar{\alpha}$  également.
3. Énoncé des relations coefficients/racines et démonstration des relations pour  $n = 3$ .
4. Montrer que si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  alors  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
5. Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ .
6. Définitions de famille libre et famille liée. Montrer que si  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$  est libre et  $\vec{u} \notin \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ , alors  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{u})$  est libre.

### Note aux colleurs

Attention l'algèbre linéaire chez les polynômes n'est pas au programme de colle de cette semaine!

### Thèmes de la colle

- POLYNÔMES :**
- Généralités : définition, opérations, degré d'un polynôme, division euclidienne, diviseurs et multiples.
  - Polynômes dérivés et racines d'un polynôme : racine d'un polynôme, dérivées successives, multiplicité d'une racine.
  - Factorisations d'un polynôme : décomposition en polynômes irréductibles, polynômes scindés, factorisations dans  $\mathbb{C}[X]$ , dans  $\mathbb{R}[X]$ , relations coefficients/racines (somme et produit uniquement).
  - Application de la division euclidienne au calcul de puissance de matrices.

- ESPACES VECTORIELS :**
- Espaces vectoriels : définitions, espaces vectoriels classiques.
  - Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisations pratiques.
  - Familles de vecteurs : Combinaisons linéaires, famille libres, familles liées, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs, bases.
  - Intersection, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires : définition et caractérisation.

### Prévisions pour la semaine suivante

Dimension d'un espace vectoriel.

