PROGRAMME DE COLLES 19

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncé de :
   - la relation de divisibilité ;
   - la propriété de division euclidienne.

   Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme à coefficient réel alors $\overline{\alpha}$ également.
3. Énoncé des relations coefficients/racines et démonstration des relations pour $n = 3$.
4. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
6. Définitions de famille libre et famille liée. Montrer que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et $\overrightarrow{u} \notin \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u})$ est libre.

Note aux colleurs

Attention l'algèbre linéaire chez les polynômes n'est pas au programme de colle de cette semaine !

Thèmes de la colle

POLYNÔMES :

- Généralités : définition, opérations, degré d'un polynôme, division euclidienne, diviseurs et multiples.
- Polynômes dérivés et racines d'un polynôme : racine d'un polynôme, dérivées successives, multiplicité d'une racine.
- Factorisations d'un polynôme : décomposition en polynômes irréductibles, polynômes scindés, factorisations dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, relations coefficients/racines (somme et produit uniquement).
- Application de la division euclidienne au calcul de puissance de matrices.

ESPACES VECTORIELS :

- Espaces vectoriels : définitions, espaces vectoriels classiques.
- Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisations pratiques.
- Familles de vecteurs : Combinaisons linéaires, famille libres, familles liées, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs, bases.
- Intersection, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires : définition et caractérisation.

Prévisions pour la semaine suivante

Dimension d'un espace vectoriel.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 18

Polynômes

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Maîtriser le degré d'un polynôme.

-M2- Maîtriser l'expression des coefficients d'un produit de polynômes.

-M3- Savoir manipuler la relation de divisibilité et effectuer une division euclidienne quelconque.

-M4- Savoir faire une décomposition en éléments simples élémentaire.

-M5- Connaître la notion de racines simples et multiples ainsi que leur lien avec la factorisation du polynôme.

-M6- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

-M7- Savoir manipuler les relations coefficients/racines.

Exercice 1 : [M1] Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P^2 = \frac{1}{2}X^3P'$. On note $p = \deg(P)$.

1. Exprimer $\deg(P^2)$ et $\deg\left(\frac{1}{2}X^3P'\right)$ en fonction de p.
2. En déduire les valeurs possibles de p puis la forme de P.
3. Étudier la réciproque.

Exercice 2 : [M2] On pose : $P = (X+1)^n$.

1. Montrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec a_k à expliciter.
2. En utilisant la formule du produit de polynômes expliciter la valeur du coefficient de degré k de P^2.
3. En remarquant que $P^2 = (X+1)^{2n}$, en déduire la formule : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 : [M4] Décomposer en éléments simples les expressions R suivantes puis calculer l'intégrale proposée :

(a) $R = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$;

(b) $R = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$;

(c) $R = \dfrac{X^4-11}{X^2+4}$, $I = \displaystyle\int_{0}^{2} R(t)\,dt$;

(d) $R = \dfrac{X^2+2X+1}{X^3-1}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$.

Exercice 4 : [M5] Déterminer les racines complexes de $X^3 + 1$, $X^4 - 1$.

Exercice 5 : [M5] On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

(Q 1) Vérifier que si α est racine de P, alors $\alpha + 1$ également puis que P admet une infinité de racines.

(Q 2) Conclure.

Exercice 6 : [M5] Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ et déterminer sa multiplicité. En déduire la factorisation de P.

Exercice 7 : [M6] Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $X^2 + X + 1$; $X^6 - 1$; $X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 8 : [M7] Soit $n \geq 2$. Pour $P = X^n - 1$ Donner la somme des racines (n-èmes de l'unité) et le produit des racines de P..

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 19

Espaces vectoriels

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Manipuler la notion de combinaison linéaire et de vecteurs dans d'autres espaces que ceux issus de la géométrie usuelle ;

-M2- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ;

-M3- Étudier l'intersection ou la somme de sous -espaces vectoriels ;

-M4- Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ;

-M5- Montrer qu'une famille est libre ou non ;

-M6- Montrer qu'une famille est génératrice ou non.

Exercice 1 : [M1] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 2 : [M2] Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : [M3] Soit le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni des lois de composition interne et externe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exercice 4 : [M3] Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Montrer que F est engendré par une famille de vecteurs et est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5 : [M3] On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 6 : [M3] Soit $A = \mathrm{Vect}\Big((1, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 0, 1)\Big)$ et $B = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.

1. Donner explicitement les éléments de A et de B.
2. Peut-on simplifier A?
3. Montrer que $A + B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : [M3] Soit $F = \Big\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\Big\}$, $G = \mathrm{Vect}\Big((1; 1; 1)\Big)$; $H = \Big\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\Big\}$. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ? de même pour F et H?

Exercice 8 : [M4]

1. Déterminer si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\}$ et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
2. Si F et G sont supplémenatires dans $\mathbb{R}^3$, donner la décomposition de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans ces deux-espaces supplémentaires.

Exercice 9 : [M6] Montrer que : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : [M5 - M6] $B = \{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \}$. Montrer que B est engendré par une famille de deux vecteurs que l'on précisera puis tester la liberté de cette dernière.

Exercice 11 : [M5]

1. Soit g_0, g_1, g_2 les trois vecteurs de E définis par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$
donc $g_i(x) = x^i$. La famille $\left(g_0; g_1; g_2\right)$ est-elle libre ou liée ?
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$
Étudier la liberté des famille $(f_1; f_2)$ et $\left(f_1; f_2; f_3\right)$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆