

PROGRAMME DE COLLES 9

L'examineur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer la propriété de linéarité de l'intégrale ;
2. Énoncer et démontrer les formules d'intégration par parties ;
3. Énoncé et démonstration de la formule de changement de variable ;
4. Définition de nombres premiers et montrer que tout nombre entier admet au moins un diviseur premier ;
5. Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par $b \neq 0$, alors : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
6. Énoncés et démonstrations des propriétés de la fonction partie entière ;
7. Définition de nombres rationnels et de nombres irrationnels. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Thèmes de la colle

PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL :

- Primitives : Définition, existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle, ensemble de l'ensemble des primitives d'une fonction continue sur un intervalle ;
- Intégrales : Intégrale d'une fonction continue sur un segment, lien avec le calcul de primitives ;
- Calculs pratiques de primitives ou d'intégrales : Primitives usuelles, primitives de formes usuelles, intégration par parties, formule de changement de variable, primitives ou intégrales usuelles : $\int \cos(wx)e^{\alpha x} dx, (w; \alpha) \in \mathbb{R}^2, \int \cos^m(x) \sin^n(x) dx, \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, a \neq 0$.
- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 : Cas de l'équation normalisée : structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène, recherche de solutions particulières par la méthode de variation de la constante. Résolution du cas général en se ramenant à l'équation normalisée sur chaque intervalle où le coefficient dominant ne s'annule pas. Problème de Cauchy.

NOMBRES RÉELS ET PRINCIPE DE RÉCURRENCE :

- Sous-ensembles de nombres réels : partie majorée, minorée, bornée, maximum et minimum d'un ensemble, bornes supérieures et bornes inférieures d'un ensemble, propriété de la borne supérieure.
- Entiers naturels et raisonnement par récurrence : propriété des entiers naturels, récurrence faible à pas fixé et récurrence forte.
- Arithmétique dans $\mathbb{N}$: divisibilité, diviseurs et multiples, propriétés de la relation de divisibilité, division euclidienne, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, pgcd et ppcm de deux nombres, calcul du pgcd à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
- Nombres rationnels, décimaux et réels : nombres rationnels : définition, existence, propriétés algébriques, nombres décimaux : définition et propriétés algébriques.
- Partie entière d'un nombre réel : définition, courbe représentative, principales propriétés, approximations d'un nombre réel à la précision 10^{-n} , expression d'approximations décimales par défaut et par excès d'un nombre à la précision 10^{-n} à l'aide de la fonction partie entière.

Prévisions pour la semaine suivante

Nombres entiers, réels et rationnels, suites de nombres.

Chapitre 10

Primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Maîtriser le calcul de primitives ;
- M2- Réaliser une intégration par parties ;
- M3- Faire un changement de variable ;
- M4- Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients quelconques ;

Exercice 1 : [-M1-] Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_1^6 t^2 dt; & \text{(b)} \int_1^4 \sqrt{t} dt; & \text{(c)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt; \\ \text{(d)} \int_0^4 x\sqrt{x} dx; & \text{(e)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx; & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(x) dx. \end{array}$$

Exercice 2 : [-M1-] Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{1}{x+1} \text{ sur } I =]-1; +\infty[; & \text{(b)} \frac{1}{(1+x)^2} \text{ sur } I =]-1; +\infty[; \\ \text{(c)} \frac{x}{1+x^2} \text{ sur } I = \mathbb{R}; & \text{(d)} \frac{1}{(2x+1)^3} \text{ sur } I =]-\frac{1}{2}; +\infty[; \\ \text{(e)} \sqrt{2x+1} \text{ sur } I =]-\frac{1}{2}; +\infty[; & \text{(f)} \sin(\omega x + \varphi) \text{ avec } \omega \neq 0. I = \mathbb{R}; \\ \text{(g)} \sin^2(x) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 3 : [-M2-] Calculer :

$$\text{(a)} \int_0^1 x e^x dx; \quad \text{(b)} \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) dx.$$

Exercice 4 : Montrer que

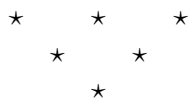
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt = 3\pi/16$$

Exercice 5 : Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$ puis $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1} dx$.

Exercice 6 : [-M3-] Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $u = e^x$.

Exercice 7 : [-M4-] Résoudre : $y' + \frac{1-x}{x}y = e^x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8 : [-M4-] Résoudre l'équation différentielle : $x^2y' + xy = 1$.



Chapitre 11

Nombres entiers, rationnels et réels

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Maîtriser la notion de borne supérieure ;
- M2- Réaliser un raisonnement par récurrence ;
- M3- Maîtriser la relation de divisibilité ainsi que la notion de nombres premiers ;
- M4- Maîtriser l'algorithme du calcul du pgcd de deux entiers ;
- M5- Maîtriser les différences entre entiers, rationnels, décimaux et réels ;
- M6- Manipuler la partie entière d'un nombre réel.

Exercice 1 : [-M1-] Pour les ensembles A et fonctions f ci-dessous, déterminer : $\sup_{x \in A} \{f(x)\}$ puis préciser la valeur du maximum lorsqu'il existe :

$$1. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{et } A = [0; 1].$$

$$2. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et } A = \mathbb{R}.$$

Exercice 2 : [-M2-] Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3 : [-M2-] Montrer que pour tout entier naturel $n \geq \dots$, $\mathcal{P}(n)$ « $2^n \geq n + 2$ » est vraie.

Exercice 4 : [-M2-] Soit (U_n) telle que : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$. Conjecturer une expression simple de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrez par récurrence votre conjecture.

Exercice 5 : [-M2-] Soit (U_n) telle que : $U_0 = 1, U_1 = -3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n(2n + 1)$.

Exercice 6 : [-M2-] On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n $a_n = n!$.

Exercice 7 : [-M3-] Soit $n = \sum_{i=0}^k a_i 10^i$, $a_i \in \{0; \dots; 9\}$, sa décomposition en base 10. Alors montrer que n est divisible par 4 si et seulement si 4 divise $10a_1 + a_0$.

Exercice 8 : [-M3-] Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.

1. En cherchant les restes possibles de la division euclidienne de n par 3, montrer que $n(n-5)(n+5)$ est un multiple de 3.
2. En déduire que $6|n(n-5)(n+5)$.

Exercice 9 : [-M3-] Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants : 375; 777 000.

Exercice 10 : [-M4-] Calculer de deux façons différentes le pgcd de (420, 198).

Exercice 11 : [-M5-] On considère $x \in \mathbb{Q}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercice 12 : [-M6-] Résoudre l'équation $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

