PROGRAMME DE COLLES 7

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Expressions simples de : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} q^k$ avec explications.
2. Énoncé et démonstration de la formule du triangle de Pascal.
3. Montrer que la composition d'applications injectives (resp. surjectives) est injective (resp. surjective).
4. Énoncés du théorème de la bijection et de la régularité de la fonction réciproque (continuité, dérivabilité) suivant la régularité de f.
5. Définition de la fonction Arcos. Énoncé et démonstration de l'expression de la dérivée de Arcos.

Thèmes de la colle

SOMMES ET PRODUITS DE NOMBRES :

- Sommes et produits usuels : Expressions de $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=0}^{n} k$, utilisation de l'exponentielle et du logarithme pour passer d'une somme à un produit et réciproquement, identité remarquable $a^n - b^n$;
- Binôme de Newton : Factorielle d'un nombre, coefficients binômiaux, triangle de Pascal, formule du binôme de Newton et application au calcul de sommes.
- Propriétés de la somme et du produit : Additivité, multiplicativité, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, relation de Chasles, télescopage, glissement d'indice ;
- Sommmes doubles rectangulaires et triangulaires.

BIJECTIONS ET FONCTIONS RECIPROQUES :

- Bijections et fonctions réciproques : applications injectives, surjectives, bijectives, composition d'applications injectives, surjectives, bijectives, lien avec l'existence d'une application réciproque, détermination pratique d'une application réciproque.
- Cas des fonctions réelles : Tracé de la courbe représentative de f^{-1} à partir de la courbe représentative de f, théorème de la bijection, régularité de l'application réciproque et expression de $(f^{-1})'$.
- Fonctions trigonométriques réciproques : Fonctions Arcos, Arcsin, Arctan.

Prévisions pour la semaine suivante

Bijections et applications réciproques, primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Chapitre 8

Sommes et produits de nombres

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- savoir calculer des sommes simples issues des suites géométriques et/ou arithmétiques ;

-M2- savoir reconnaitre un télescopage ;

-M3- savoir effectuer et utiliser un glissement d'indice ;

-M4- savoir manipuler les factorielles et coefficients binomiaux ;

-M5- savoir utiliser la formule du binome de Newton ;

-M6- savoir calculer des sommes doubles.

Exercice 1 : [M1] Calculer les sommes suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+1}$; (e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(5k+3^k)$.

Exercice 2 : [M2] Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Exercice 3 : [M2]

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1;\ 0\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n.

Exercice 4 : [M1] Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$.

Exercice 5 : [M3] Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k+1)$.

Exercice 6 : [M3] Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$.

Exercice 7 : [M4] Exprimer simplement à l'aide de factorielles les produits suivants :

(a) $\prod_{k=4}^{n} k$;

(b) $\prod_{k=1}^{n} k^2$;

(c) $\prod_{k=3}^{n} k^2$;

(d) $\prod_{k=1}^{n} (k+2)$.

Exercice 8 : [M4] On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} 2k$ et $I_n = \prod_{k=1}^{n} (2k+1)$. Calculer P_n et en déduire I_n.

Exercice 9 : [M1] Calculer : $\prod_{k=0}^{n} e^k$.

Exercice 10 : [M6] Calculer $\sum_{(i;\, j) \in [\![1;\, n]\!]^2} ij$.

Exercice 11 : [M6] Calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.

Exercice 12 : [M5] Donner une expression simple des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

(c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$;

(d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k}$;

(e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$;

(f) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 9

Bijections et fonctions réciproques usuelles

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Étudier la bijectivité d'une application quelconque ;

-M2- Calculer l'application réciproque d'une application quelconque ;

-M3- Montrer la bijectivité d'une fonction réelle ;

-M4- Manipuler les fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 1 : [-M1-M2-] On note $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n + 1$. En utilisant les définitions, détectez si l'application f est injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 : [-M1-M2-] Montrer que l'application $f : [-1;\ +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$ est bijective et calculer son application réciproque.

Exercice 3 : [-M1-M2-] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f((x, y)) = (x + y, x - y)$. Vérifier que f est bijective et donner l'expression de son application réciproque f^{-1}.

Exercice 4 : [-M1-M2-] Dans le plan complexe, une rotation de centre O et d'angle θ admet-elle une application réciproque ? Si oui, quelle-est-elle ?

Exercice 5 : [-M3-] Montrer que f définie par $f(x) = \ln(x+1) - \ln(2x) - 1$ induit une bijection de $]0;\ +\infty[$, vers un ensemble que l'on précisera.

Exercice 6 : [-M4-] Montrer l'égalité : $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pour $x \in [-1;\ 0[\cup]0;\ 1]$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆