

PROGRAMME DE COLLES 6

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer les expressions complexes des translations, rotations de centre l'origine et homothéties de centre l'origine.
2. Énoncer et démontrer les relations coefficients/racines.
3. Montrer que trois points A , B et C distincts sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
4. Énoncé et démonstration de l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 1.
5. Énoncé et démonstration de la propriété de linéarité d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène.
6. Équation complète et équation homogène associée : énoncé et démonstration de la proposition 3.

Thèmes de la colle**NOMBRES COMPLEXES PARTIE 2 :**

- Nombres complexes et géométrie : affixe d'un point, d'un vecteur, interprétation géométrique du module, du conjugué, de la somme, de l'inégalité triangulaire, condition d'alignement de trois points distincts et condition d'orthogonalité de deux droites (AB) et (CD) .
- Résolution d'équations complexes : racines carrées d'un nombre complexe, résolution du trinôme à coefficients complexes, relations coefficients racines.
- Racines nièmes de l'unité, d'un nombre complexe quelconque, somme des racines nièmes de l'unité

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS :

- Généralités : dérivation de fonctions à valeurs complexes, vocabulaire des équations différentielles, linéarité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
- Étude de l'équation homogène : équation caractéristique et linéarité de l'ensemble des solutions, expression de l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 1 et 2 à coefficients réels.
- Recherche de solutions particulières : cas d'un second membre constant, de la forme ae^{mx} , et de la forme $a \cos(wx)$ (où $a \sin(wx)$), avec $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{R}$, principe de superposition.
- Équation complète : synthèse : $S = S_H + y_P$.
- Résolution de problèmes de Cauchy pour des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Prévisions pour la semaine suivante

Équations différentielles linéaires à coefficients constants - sommes et produits de nombres.

Chapitre 6

Nombres complexes : compléments**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Traduire et résoudre des problèmes de géométrie plane avec des nombres complexes ;
- M2- Résoudre une équation de degré deux à coefficients complexes ;
- M3- Connaître les racines nèmes de l'unité et les utiliser pour résoudre des équations complexes.

Exercice 1 : [-M1-] Identifier les transformations du plan d'écritures complexes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(z) &= z + i - 4; & \text{(b)} \quad f(z) &= -iz; & \text{(c)} \quad f(z) &= -\frac{1}{2}z; \\ \text{(d)} \quad f(z) &= -jz, j = e^{2i\pi/3}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : [-M1-] Résoudre géométriquement l'équation $|z - 1| = |z + i|$.

Exercice 3 : [-M1-] Soient A et B deux points du plan d'affixe z_A et z_B . Quelle est l'affixe du milieu, noté I , de $[AB]$?

Exercice 4 : [-M1-] Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z + 1| \leq 1 \\ |z - 1| \leq 1 \end{cases}$

Exercice 5 : [-M1-] Soient $A(1 + i)$, $B(3 + 4i)$ et $C(-2 + 3i)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 6 : [-M1-] Donner l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

(Q 1) $A(1)$; $M(z)$; $M'(z^2)$ sont alignés.

(Q 2) $A(1)$; $M(z)$; $M'(z^2)$ forment un triangle rectangle en A .

Exercice 7 : [-M2-] Trouver les racines carrées de $3 - 4i$. En déduire les racines carrées de $3 + 4i$.

Exercice 8 : [-M2-] Résoudre l'équation : $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

Exercice 9 : [-M2-] En cherchant une racine évidente $(\pm 1, \pm 2, \pm i)$, trouver finalement les deux racines de chaque trinôme suivant :

(a) $P_1(z) = z^2 + iz - 1 - i$

(b) $P_2(z) = 2z^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)z + 2\sqrt{3}$.

Exercice 10 : [-M3-] Déterminer les racines 8-èmes de l'unité, les représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 11 : [-M3-] Résoudre les équations suivantes et donner les formes exponentielles des solutions :

$$(a) z^3 = 1; (b) z^3 = 8 \quad (c) z^3 = 1 + i \quad (d) \left(\frac{z}{z-1} \right)^3 = 1.$$



Chapitre 7

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants avec seconds membres constants, trigonométriques ou exponentiel.

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle : (E) $y'' + 2y' + y = 0$. Soit f une solution de (E). On pose : $g(x) = f(x)e^x$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 0$. Qu'en déduit-on pour g ?
2. En déduire que si f est solution de (E), alors $\exists(a; b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax + b)e^{-x}$.
3. Étudier la réciproque.

Exercice 2 : Donner l'ensemble des solutions réelles, ainsi que l'ensemble des solutions complexes des équations différentielles ci-dessous :

(a) $y'' - y = 0$. (b) $y'' - 2y' + y = 0$ (c) $y'' + y = 0$. (d) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Exercice 3 :

(Q 1) $y'' - y = 1$

(Q 2) $y'' - y = \cos(2x)$

(Q 3) $y'' - y = e^x$

(Q 4) $y'' + y = \cos(x)$

Exercice 4 : Résoudre :
$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

