

PROGRAMME DE COLLES 5

L'examineur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Définitions de : fonction dérivable en un point, paire, impaire, périodique, croissante, décroissante, strictement décroissante, monotone. Définitions d'images directes et images réciproques.
2. Énoncer les croissances comparées et démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\beta} = 0$ ($\beta > 0$).
3. Énoncer et démontrer les inégalités associées à $\ln$, $\exp$ et $\sin$.
4. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
5. Énoncer et démontrer les expressions complexes des translations, rotations de centre l'origine et homothéties de centre l'origine.
6. Énoncer et démontrer les relations coefficients/racines.
7. Montrer que trois points A , B et C distincts sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Thèmes de la colle

ÉTUDES DE FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE :

- Études de fonctions : trigonométriques ou définies à partir d'opérations usuelles de fonctions de référence : $\ln$, $\exp$, $x \mapsto x^\alpha$, ch , sh .
- Calculs de limites : Rappels des opérations usuelles sur les limites, croissances comparées, calculs de limites de fractions rationnelles, utilisation du taux d'accroissement et des limites associées à connaître : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, utilisation de l'expression conjuguée en présence de radicaux.

NOMBRES COMPLEXES PARTIE 2 :

- Nombres complexes et géométrie : affixe d'un point, d'un vecteur, interprétation géométrique du module, du conjugué, de la somme, de l'inégalité triangulaire, condition d'alignement de trois points distincts et condition d'orthogonalité de deux droites (AB) et (CD) .
- Résolution d'équations complexes : racines carrées d'un nombre complexe, résolution du trinôme à coefficients complexes, relations coefficients racines.
- Racines nièmes de l'unité, d'un nombre complexe quelconque, somme des racines nièmes de l'unité

Note aux colleurs

- La fonction th n'est pas au programme de PTSI.
- L'obtention de l'équation réduite d'une asymptote oblique en calculant : $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$ n'est pas exigible des étudiants.

Prévisions pour la semaine suivante

Nombres complexes partie 2 et équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Chapitre 5

Études de fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Maîtriser les points fondamentaux du vocabulaire des applications (image directe, réciproque, composition);
- M2- Déterminer le domaine d'étude d'une fonction;
- M3- Maîtriser le calcul de dérivées;
- M4- Maîtriser le calcul de limites élémentaires;
- M5- Déterminer des asymptotes à la courbe représentative d'une fonction;
- M6- Savoir faire l'étude d'une fonction de façon autonome;
- M7- Utiliser les études de fonctions afin de résoudre des problèmes d'optimisation.

Exercice 1 : [-M1-] Soit $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définies par $n \mapsto 2n$ et $n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Calculer $I \circ P$ et $P \circ I$.

Exercice 2 : [-M1-]

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + x - 2$$

Soit $A = [-3; -1]$, $B = [0; \frac{3}{2}]$. Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(A) \cap f(B)$, $f(A) \cup f(B)$.

Soit $C = [-2; 0]$, $D = [-4; -2]$. Déterminer $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cap D)$ et $f^{-1}(C \cup D)$.

Exercice 3 : [-M2-] Après avoir donné l'ensemble de définition, étudier la parité et/ou la périodicité de la fonction f puis indiquer l'intervalle sur lequel il suffit d'étudier les fonctions.

$$(a) f(x) = \sin^2(x) \cos(2x); \quad (b) f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right);$$

Exercice 4 : [-M3-] Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur un ensemble D que l'on précisera et calculer leurs dérivées sur D .

$$(a) f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^5}; \quad (b) g(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-3} \right);$$

$$(c) h(x) = \sqrt{\frac{e^x - 2}{e^x + 1}}; \quad (d) i(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \ln(x) e^x.$$

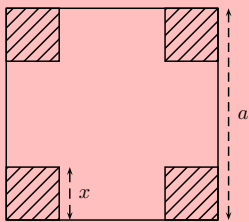
Exercice 5 : [-M4-] Calculer les limites suivantes aux points proposés :

(a) $\frac{x^3 + x^2 + x - 14}{x^2 - 4}$ en 2; (b) $\frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ en 0; (c) $\frac{\ln(x)}{x-1}$ en 1.

Exercice 6 : [-M5-] Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x - 5} - 2x \right)$. En déduire que la fonction f d'expression $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 5}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on donnera une équation réduite.

Exercice 7 : [-M6-] Faire l'étude complète des deux fonctions suivantes : $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \sqrt{3} \cos(x)$, $g(x) = x^x$.

Exercice 8 : [-M7-]



Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on dispose d'une feuille carrée (en carton) dont le côté est de longueur a ($a \neq 0$). À chacun des quatre angles, on découpe un carré de longueur x et on rabat les quatre angles perpendiculairement. On cherche x pour obtenir une boîte de volume maximal.

Chapitre 6

Nombres complexes : compléments**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Traduire et résoudre des problèmes de géométrie plane avec des nombres complexes ;
- M2- Résoudre une équation de degré deux à coefficients complexes ;
- M3- Connaître les racines nèmes de l'unité et les utiliser pour résoudre des équations complexes.

Exercice 1 : [-M1-] Identifier les transformations du plan d'écritures complexes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(z) &= z + i - 4; & \text{(b)} \quad f(z) &= -iz; & \text{(c)} \quad f(z) &= -\frac{1}{2}z; \\ \text{(d)} \quad f(z) &= -jz, j = e^{2i\pi/3}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : [-M1-] Résoudre géométriquement l'équation $|z - 1| = |z + i|$.

Exercice 3 : [-M1-] Soient A et B deux points du plan d'affixe z_A et z_B . Quelle est l'affixe du milieu, noté I , de $[AB]$?

Exercice 4 : [-M1-] Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z + 1| \leq 1 \\ |z - 1| \leq 1 \end{cases}$

Exercice 5 : [-M1-] Soient $A(1 + i)$, $B(3 + 4i)$ et $C(-2 + 3i)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 6 : [-M1-] Donner l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

(Q 1) $A(1)$; $M(z)$; $M'(z^2)$ sont alignés.

(Q 2) $A(1)$; $M(z)$; $M'(z^2)$ forment un triangle rectangle en A .

Exercice 7 : [-M2-] Trouver les racines carrées de $3 - 4i$. En déduire les racines carrées de $3 + 4i$.

Exercice 8 : [-M2-] Résoudre l'équation : $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

Exercice 9 : [-M2-] En cherchant une racine évidente $(\pm 1, \pm 2, \pm i)$, trouver finalement les deux racines de chaque trinôme suivant :

(a) $P_1(z) = z^2 + iz - 1 - i$

(b) $P_2(z) = 2z^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)z + 2\sqrt{3}$.

Exercice 10 : [-M3-] Déterminer les racines 8-èmes de l'unité, les représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 11 : [-M3-] Résoudre les équations suivantes et donner les formes exponentielles des solutions :

$$(a) z^3 = 1; (b) z^3 = 8 \quad (c) z^3 = 1 + i \quad (d) \left(\frac{z}{z-1} \right)^3 = 1.$$

