PROGRAMME DE COLLES 4

L'examinateur pourra choisir une question de cours ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Montrer que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de leurs dérivées en admettant les limites usuelles nécessaires.
2. Fonction $\tan$: domaine de définition, dérivées, limites, tableau de variations, courbe représentative. *L'examinateur pourra, s'il le désire, demander la justification du calcul de la dérivée.*
3. Montrer les propriétés suivantes de la fonction $\tan$:
$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x), \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$$
4. Énoncer et démontrer la formule de $\tan(a+b)$.
5. Définition de $e^{i\theta}$ et démonstration de la relation : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
6. Énoncer et justifier les propriétés de la conjugaison.
7. Énoncé et démonstration des formules d'Euler, de De Moivre, de factorisations par l'angle moitié.

Thèmes de la colle

TRIGONOMÉTRIE :
- Manipulations d'expressions trigonométriques.
- Équations et inéquations trigonométriques.

NOMBRES COMPLEXES :
- Généralités : opérations algébriques sur les nombes complexes, conjugué, module.
- Exponentielle complexe : définition, formules d'Euler, formule de De Moivre, angle moitié, forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe, propriétés de l'argument.
- Transformations d'expressions trigonométriques : linéarisation, délinéarisation, factorisation d'expressions de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$.

Note aux colleurs

- L'étude de fonctions trigonométriques n'est pas spécifiquement au programme de colles de cette semaine. Elle sera plutôt développée dans le chapitre « Études de fonctions ».
- Aucun résultat général sur les trinômes, racines n-èmes de l'unité, nombres complexes et géométrie n'est au programme de cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante

Nombres complexes, études de fonctions

Chapitre 3

Trigonométrie

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :
-M1- savoir faire du calcul algébrique avec les fonctions trigonométriques usuelles.

Exercice 1 : [-M1-] Calculer $\sin\left(\frac{91\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 : [-M1-] Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant uniquement que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3 : [-M1-] Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : [-M1-] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $A = \sin(\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;
(b) $B = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
(c) $C = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 5 : [-M1-] Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

Exercice 6 : [-M1-] Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 7 : [-M1-] Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x n'est pas congru 0 module π. On pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Exprimer simplement $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ uniquement en fonction de t.

Exercice 8 : [-M1-] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$; (b) $\tan(2x - \pi) = \sqrt{3}$.

Exercice 9 : [-M1-]
À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation : $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ puis $\tan(x) > 1$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 4

Nombres complexes : la base

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Faire du calcul algébrique élémentaire avec les nombres complexes sous forme algébrique ;

-M2- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement ;

-M3- Faire du calcul algébrique élémentaire avec les nombres complexes sous forme exponentielle ;

-M4- Utiliser les nombres complexes pour transformer des expressions trigonométriques.

Exercice 1 : [-M1-] Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\text{(a) } \frac{i+5}{(i+3)^2}; \quad \text{(b) } \frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}; \quad \text{(c) } \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^2.$$

Exercice 2 : [-M1-] Calculer $|(1+i)^{26}|$.

Exercice 3 : [-M1-] Résoudre l'équation $|z-1| = |z+i|$.

Exercice 4 : [-M1-] Montrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathcal{R}e(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

Exercice 5 : [-M2-] Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $-1-i$; (b) $1-i\sqrt{3}$; (c) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{1+i}$.

Exercice 6 : [-M3-] Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $-3e^{7i\pi/8}$; (b) $2ie^{i\pi/3}$.

Exercice 7 : [-M3-] Mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $e^{\ln(6)+i\pi/4}$ et $(1+e^{i\pi/3})^{26}$.

Exercice 8 : [-M4-] Linéariser $\sin^4(x)$ sachant que $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Exercice 9 : [-M4-] Délinéariser $\sin(3x)$.

Exercice 10 : [-M4-] Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$.