PROGRAMME DE COLLES 25

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncé et démonstration des inégalités vérifiées par le rang d'une application linéaire.
2. Projections et symétries : définitions et caractérisations.
3. Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ (E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque).
4. Montrer que
   — si f est paire et continue sur $[-a;\ a]$ ($a > 0$) alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
   — si f est continue et T périodique : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$
5. Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor Lagrange.
6. Énoncer le résultat sur les sommes de Riemann (interprétation géométrique des sommes de Riemann exigible) ainsi que la formule de Taylor avec reste intégral.

Thèmes de la colle

APPLICATIONS LINÉAIRES :

— Applications linéaires : définition, structure d'espace vectoriel, construction d'applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes, structure algébrique de l'ensemble des automorphismes.
— Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire, noyau, image d'une application linéaire, équations linéaires.
— Injectivité et surjectivité : caractérisations en dimension quelconque et en dimension finie, isomorphismes en dimension finie, espaces vectoriels isomorphes.
— Rang d'une application linéaire, théorème du rang, rang de la composée de deux applications linéaires, invariance du rang par composition par un isomorphisme.
— Projecteurs et symétries.

INTÉGRALES DE FONCTIONS :

— Révisions de calcul intégral de début d'année : intégration par parties, primitives usuelles, changement de variable.
— Encadrement d'intégrales (par exemple pour l'étude de suites).
— Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral.
— Utilisation des sommes de Riemann pour obtenir des limites de sommes.
— Étude d'une fonction définie par une intégrale.

Prévisions pour la semaine suivante

Intégration, séries numériques.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 23

Applications linéaires

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir déterminer l'expression d'une application est linéaire.

-M2- Maîtriser le calcul algébrique entre endomorphismes.

-M3- Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire.

-M4- Étudier l'injectivité et la surjectivité en dimension quelconque.

-M5- Calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie.

-M6- Savoir simplifier l'étude en M4 dans le cadre de la dimension finie.

-M7- Maîtriser la notion de projecteurs et de symétries d'un espace vectoriel quelconque.

Exercice 1 : [-M1-] Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f((1,2)) = (1,0)$ et $f((2,1)) = (0,1)$.

Exercice 2 : [-M1-] Dans $\mathbb{R}^2$, soient : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

(Q 1) Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et donner la décomposition de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en une somme de $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$.

(Q 2) Déterminer l'unique application linéaire f telle que : $\forall \overrightarrow{u} \in F, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $\forall \overrightarrow{v} \in G, f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(Q 3) Que vaut $f \circ f$? A quelle transformation du plan, f fait-elle référence ?

Exercice 3 : [-M2-] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ définie par : $\varphi(f) = f'$ pour $f \in E$.

1. Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer : φ^2 puis $(\varphi - Id)^2$.

Exercice 4 : [-M3-] On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ d'expressions :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix} \text{ et } g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g)$.
3. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 : [-M3-] Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 6 : [-M3-] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f((x;y;z)) = (2x+y+z; x+2y+z; x+y+2z)$$

et soit $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - 4Id)$.

(Q 1) Donner une base de F et de G.

(Q 2) Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 7 : [-M4-] On considère l'application $\varphi : \begin{cases} C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \end{cases}$

1. Pourquoi φ est-elle bien définie ?
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Étudier l'injectivité puis la surjectivité de φ.

Exercice 8 : [-M6-] Montrer l'application linéaire f suivante est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2})$.

Exercice 9 : [-M6-] Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0);P(1);P(2)) \end{array}$. Montrer que f est un isomorphisme. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points de coordonnées $(0;1)$; $(1;2)$; $(2;3)$.

Exercice 10 : [-M5-] Soit $f : E \to \mathbb{R}$, E de dimension finie et telle que f n'est pas l'application nulle. Quel est le rang de f ? Quelle est la dimension du noyau ?

Exercice 11 : [-M7-] Donner l'expression analytique de la projection sur la droite $(\mathcal{D}) : y = x$ parallèlement à $(\mathcal{D}') : x = 0$.

Exercice 12 : [-M7-] On considère l'application linéaire $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x-4y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$

1. Montrer que s est une symétrie.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 24

Intégration

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir encadrer une intégrale.

-M2- Utiliser les sommes de Riemann pour déterminer des limites de suites.

-M3- Savoir étudier une fonction définie par une intégrale.

-M4- Savoir utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1 : [- M1 -] On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\, dt$. Pourquoi u_n est-il bien défini ? En effectuant un encadrement de u_n, montrer que cette suite converge vers 0.

Exercice 2 : [- M1 -] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

(Q 1) En majorant la fonction intégrée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(Q 2) Soit $k \geq 1$. Calculer $I_{k-1} + I_k$.

(Q 3) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Exercice 3 : [- M1 -] En vous aidant d'encadrements, montrer que les suites définies ci-dessous existent et convergent vers 0 :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t}\, dt; \qquad v_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t^n}\, dt;$$
$$w_n = \int_{1/2}^1 (1+t)^n e^{-nt}\, dt; \quad I_n = \int_0^1 (t-t^2)^n\, dt.$$

Exercice 4 : [- M1 -] En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/4} t^3 \cos(nt)\, dt$ converge vers 0.

Exercice 5 : [- M 2 -] Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 6 : [- M 3 -] On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \qquad f_2(x) = \int_2^{2x} \ln^2(t)dt \qquad f_3(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}dt.$$

1. Montrer que f_1 est définie sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f_2 est définie sur $I =]0;\ +\infty[$ puis montrer que f_2 est de classe C^1 sur I et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f_3 est définie sur $I = \mathbb{R}^*$ puis montrer que f_3 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7 : [- M 4 -]

(Q 1) Appliquer la formule de Taylor Lagrange à la fonction exponentielle avec $x_0 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, à un ordre n quelconque pour en déduire que

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \left(\sup_{t\in[0;x]} e^t\right)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(Q 2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)}_{=S_n} = e^x.$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆