PROGRAMME DE COLLES 24

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Énoncé et démonstration de la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en dimension quelconque.
3. Énoncé et démonstration de la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en dimension finie.
4. Énoncé et démonstration des inégalités vérifiées par le rang d'une application linéaire.
5. Projections et symétries : définitions et caractérisations.
6. Montrer que si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ (E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque).

Thèmes de la colle

APPLICATIONS LINÉAIRES :

— Applications linéaires : définition, structure d'espace vectoriel, construction d'applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes, structure algébrique de l'ensemble des automorphismes.
— Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire, noyau, image d'une application linéaire, équations linéaires.
— Injectivité et surjectivité : caractérisations en dimension quelconque et en dimension finie, isomorphismes en dimension finie, espaces vectoriels isomorphes.
— Rang d'une application linéaire, théorème du rang, rang de la composée de deux applications linéaires, invariance du rang par composition par un isomorphisme.
— Projecteurs et symétries.

Prévisions pour la semaine suivante

Applications linéaires, intégration.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 23

Applications linéaires

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir déterminer l'expression d'une application est linéaire.

-M2- Maîtriser le calcul algébrique entre endomorphismes.

-M3- Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire.

-M4- Étudier l'injectivité et la surjectivité en dimension quelconque.

-M5- Calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie.

-M6- Savoir simplifier l'étude en M4 dans le cadre de la dimension finie.

-M7- Maîtriser la notion de projecteurs et de symétries d'un espace vectoriel quelconque.

Exercice 1 : [-M1-] Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f((1,2)) = (1,0)$ et $f((2,1)) = (0,1)$.

Exercice 2 : [-M1-] Dans $\mathbb{R}^2$, soient : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

(Q 1) Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et donner la décomposition de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en une somme de $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$.

(Q 2) Déterminer l'unique application linéaire f telle que : $\forall \overrightarrow{u} \in F, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $\forall \overrightarrow{v} \in G, f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(Q 3) Que vaut $f \circ f$? A quelle transformation du plan, f fait-elle référence ?

Exercice 3 : [-M2-] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ définie par : $\varphi(f) = f'$ pour $f \in E$.

1. Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer : φ^2 puis $(\varphi - Id)^2$.

Exercice 4 : [-M3-] On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ d'expressions :

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$ et $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(g)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g)$.
3. Montrer que : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 5 : [-M3-] Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 6 : [-M3-] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f((x;y;z)) = (2x+y+z; x+2y+z; x+y+2z)$$

et soit $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - 4Id)$.

(Q 1) Donner une base de F et de G.

(Q 2) Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 7 : [-M4-] On considère l'application $\varphi : \begin{cases} C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \end{cases}$

1. Pourquoi φ est-elle bien définie ?
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Étudier l'injectivité puis la surjectivité de φ.

Exercice 8 : [-M6-] Montrer l'application linéaire f suivante est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2})$.

Exercice 9 : [-M6-] Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0); P(1); P(2)) \end{array}$. Montrer que f est un isomorphisme. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points de coordonnées $(0;1); (1;2); (2;3)$.

Exercice 10 : [-M5-] Soit $f : E \to \mathbb{R}$, E de dimension finie et telle que f n'est pas l'application nulle. Quel est le rang de f ? Quelle est la dimension du noyau ?

Exercice 11 : [-M7-] Donner l'expression analytique de la projection sur la droite $(\mathcal{D}) : y = x$ parallèlement à $(\mathcal{D}') : x = 0$.

Exercice 12 : [-M7-] On considère l'application linéaire $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$

1. Montrer que s est une symétrie.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆