PROGRAMME DE COLLES 23

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation d'équivalence.
2. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.
3. Énoncé et démonstration de la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en dimension quelconque.
4. Énoncé et démonstration de la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en dimension finie.

Thèmes de la colle

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET RELATION DE PRÉPONDÉRANCE :

— Relations de négligeabilité : définition, opérations usuelles, comparaisons des fonctions et des suites de référence .

— Généralités : définitions, unicité des coefficients d'un développement limité, troncature d'un $DL_n(x_0)$ pour obtenir un $DL_p(x_0)$, avec $p \leq n$, coefficients du $DL_n(0)$ de fonctions paires et impaires, développements limités à l'ordre 1 et fonctions dérivables, intégration d'un développement limité ;

— Développements limités usuels en 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\text{Arctan}(x)$, $\tan(x)$ (uniquement à l'ordre 3) ;

— Opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, composition, quotient.

ÉQUIVALENTS ET LIMITES DE SUITES ET FONCTIONS :

— Suites et fonctions équivalentes : définition, propriétés, équivalents usuels, opérations usuelles, équivalents de suites polynômiales, équivalents et limites, équivalents et inégalités.

— Prépondérance, domination de suites : définitions, prépondérance et équivalents, opérations usuelles, comparaison des suites de référence.

— Applications : recherche de limites, étude d'extrêma locaux, position d'une courbe par rapport à sa tangente, développements limités et asymptotes.

Prévisions pour la semaine suivante

Applications linéaires.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 22

Limites et équivalents de fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Déterminer un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point ;

-M2- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) au calcul de limites ;

-M3- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) à la recherche de tangentes et de position par rapport à cette dernière ;

-M4- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction (en particulier les asympotes obliques).

Exercice 1 : [M1] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;
(d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

Exercice 2 : [M1] Déterminer un équivalent de :
$\ln(x)$ en 1; $\sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$

Exercice 3 : [M1] Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) e^x-e, $a=1$; (b) $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$, $a=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : [M1] Déterminer un équivalent simple de $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5 : [M1] **Composition d'un équivalent ?** Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f\underset{a}{\sim}g$ et que f est strictement positive au voisinage de a. Démontrer que si f admet une limite $\ell>0$ différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a. Qu'en est-il si f admet une limite égale à $+\infty$? égale à 0?

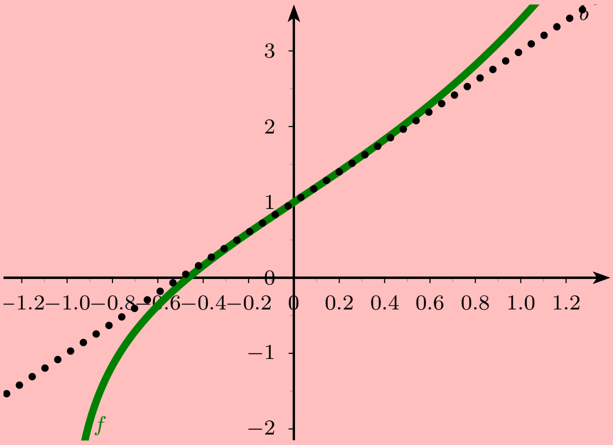
Exercice 6 : [M2] Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{x/2}}{\ln(1+x)-x}$.

Exercice 7 : [M2] Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

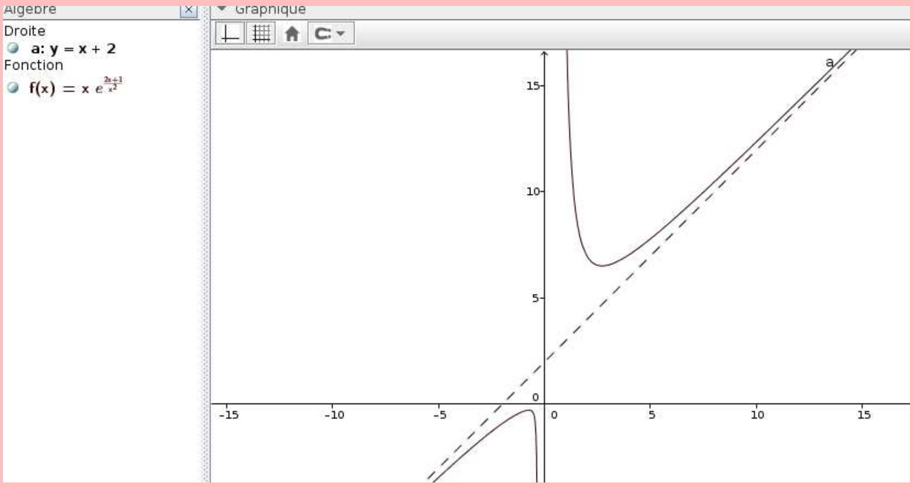
(a) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\cos(3x)-1}$;
(c) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$; (d) $\frac{x\ln(\cos(x))}{\tan(x)-x}$;
(e) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$; (f) $g(x)=\frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})-\mathrm{ch}(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Exercice 8 : [M3]
Soit $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser la régularité de f sur cet ensemble.
2. Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 afin de donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la tangente en $A(0;f(0))$ et de la courbe représentative de f.



Exercice 9 : [M4] Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$. On donne une représentation de sa courbe représentative ci-dessous :



⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 23

Applications linéaires

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir déterminer l'expression d'une application est linéaire.

-M2- Maîtriser le calcul algébrique entre endomorphismes.

-M3- Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire.

-M4- Étudier l'injectivité et la surjectivité en dimension quelconque.

-M5- Calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie.

-M6- Savoir simplifier l'étude en M4 dans le cadre de la dimension finie.

-M7- Maîtriser la notion de projecteurs et de symétries d'un espace vectoriel quelconque.

Exercice 1 : [-M1-] Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f((1,2)) = (1,0)$ et $f((2,1)) = (0,1)$.

Exercice 2 : [-M1-] Dans $\mathbb{R}^2$, soients : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;/\; x - y = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

(Q 1) Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et donner la décomposition de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en une somme de $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$.

(Q 2) Déterminer l'unique application linéaire f telle que : $\forall \overrightarrow{u} \in F, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $\forall \overrightarrow{v} \in G, f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(Q 3) Que vaut $f \circ f$? A quelle transformation du plan, f fait-elle référence ?

Exercice 3 : [-M2-] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ définie par : $\varphi(f) = f'$ pour $f \in E$.

1. Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer : φ^2 puis $(\varphi - Id)^2$.

Exercice 4 : [-M3-] On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ d'expressions :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix} \text{ et } g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g)$.
3. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 : [-M3-] Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.