PROGRAMME DE COLLES 22

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Énoncé et démonstration de la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en dimension quelconque.
3. Montrer si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Thèmes de la colle

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET RELATION DE PRÉPONDÉRANCE :

— Relations de négligeabilité : définition, opérations usuelles, comparaisons des fonctions et des suites de référence .

— Généralités : définitions, unicité des coefficients d'un développement limité, troncature d'un $DL_n(x_0)$ pour obtenir un $DL_p(x_0)$, avec $p \leq n$, coefficients du $DL_n(0)$ de fonctions paires et impaires, développements limités à l'ordre 1 et fonctions dérivables, intégration d'un développement limité ;

— Développements limités usuels en 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\tan(x)$ (uniquement à l'ordre 3) ;

— Opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, composition, quotient.

ÉQUIVALENTS ET LIMITES DE SUITES ET FONCTIONS :

— Suites et fonctions équivalentes : définition, propriétés, équivalents usuels, opérations usuelles, équivalents de suites polynômiales, équivalents et limites, équivalents et inégalités.

— Applications : recherche de limites, étude d'extrêma locaux, position d'une courbe par rapport à sa tangente, développements limités et asymptotes.

Prévisions pour la semaine suivante

Applications linéaires.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 22

Limites et équivalents de fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Déterminer un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point ;

-M2- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) au calcul de limites ;

-M3- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) à la recherche de tangentes et de position par rapport à cette dernière ;

-M4- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction (en particulier les asympotes obliques).

Exercice 1 : [M1] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

Exercice 2 : [M1] Déterminer un équivalent de :
$\ln(x)$ en 1; $\sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$

Exercice 3 : [M1] Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) e^x-e, $a=1$; (b) $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$, $a=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : [M1] Déterminer un équivalent simple de $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5 : [M1] **Composition d'un équivalent ?** Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f \underset{a}{\sim} g$ et que f est strictement positive au voisinage de a. Démontrer que si f admet une limite $\ell>0$ différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a. Qu'en est-il si f admet une limite égale à $+\infty$? égale à 0?

Exercice 6 : [M2] Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{x/2}}{\ln(1+x)-x}$.

Exercice 7 : [M2] Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

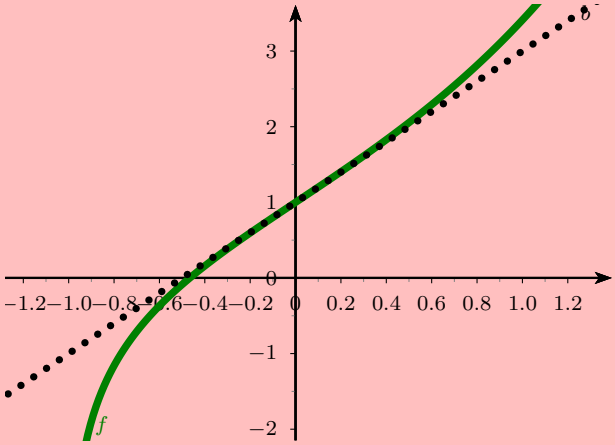
(a) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\cos(3x)-1}$;

(c) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$; (d) $\frac{x\ln(\cos(x))}{\tan(x)-x}$;

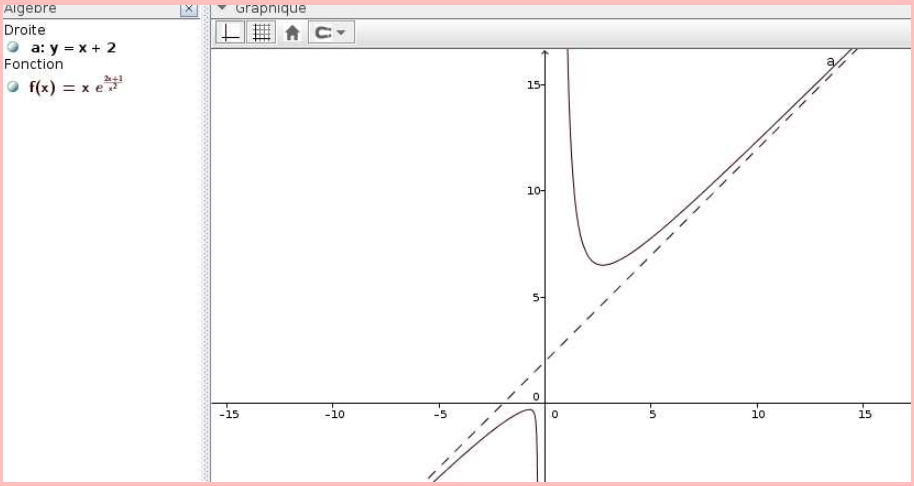
(e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$; (f) $g(x) = \frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})-\mathrm{ch}(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Exercice 8 : [M3]
Soit $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser la régularité de f sur cet ensemble.
2. Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 afin de donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la tangente en $A(0; f(0))$ et de la courbe représentative de f.



Exercice 9 : [M4] Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$. On donne une représentation de sa courbe représentative ci-dessous :



⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 23

Applications linéaires

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir déterminer l'expression d'une application est linéaire.

-M2- Maîtriser le calcul algébrique entre endomorphismes.

-M3- Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire.

-M4- Étudier l'injectivité et la surjectivité en dimension quelconque.

-M5- Calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie.

-M6- Savoir simplifier l'étude en M4 dans le cadre de la dimension finie.

-M7- Maîtriser la notion de projecteurs et de symétries d'un espace vectoriel quelconque.

Exercice 1 : [-M1-] Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f((1,2)) = (1,0)$ et $f((2,1)) = (0,1)$.

Exercice 2 : [-M1-] Dans $\mathbb{R}^2$, soient : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

(Q 1) Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et donner la décomposition de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en une somme de $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$.

(Q 2) Déterminer l'unique application linéaire f telle que : $\forall \overrightarrow{u} \in F, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $\forall \overrightarrow{v} \in G, f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

(Q 3) Que vaut $f \circ f$? A quelle transformation du plan, f fait-elle référence ?

Exercice 3 : [-M2-] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ définie par : $\varphi(f) = f'$ pour $f \in E$.

1. Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer : φ^2 puis $(\varphi - Id)^2$.

Exercice 4 : [-M3-] On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ d'expressions :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \end{pmatrix} \text{ et } g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(g)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g)$.
3. Montrer que : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 5 : [-M3-] Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.