PROGRAMME DE COLLES 22

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation de prépondérance.
2. Énoncé de la comparaison des suites de référence et démonstration de $a^n = o(n!)$.
3. Énoncer tous les développements limités usuels et démontrer les développements limités de $\dfrac{1}{1-x}$, $\exp$ et $\ln(1+x)$ en 0.
4. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation d'équivalence.

Thèmes de la colle

DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL :

— Espaces vectoriels de dimension finie : bases d'un espace vectoriel, définition d'un espace vectoriel de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, espaces vectoriels de dimension finie classiques, familles libres et génératrices en dimension finie, théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.

— Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sous-espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs, relation de Grassmann, caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.

— Espaces vectoriels de polynômes.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET RELATION DE PRÉPONDÉRANCE :

— Relations de négligeabilité : définition, opérations usuelles, comparaisons des fonctions et des suites de référence .

— Généralités : définitions, unicité des coefficients d'un développement limité, troncature d'un $DL_n(x_0)$ pour obtenir un $DL_p(x_0)$, avec $p \leq n$, coefficients du $DL_n(0)$ de fonctions paires et impaires, développements limités à l'ordre 1 et fonctions dérivables, intégration d'un développement limité ;

— Développements limités usuels en 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\tan(x)$ (uniquement à l'ordre 3) ;

— Opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, composition, quotient.

Prévisions pour la semaine suivante

Limites et équivalents de fonctions.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 21

Développements limités

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir comparer des suites ou fonctions au voisinage d'un point.

-M2- Connaître les théorèmes généraux sur les développements limités usuels.

-M3- Savoir calculer le développement limité en un point à un ordre fixé par opérations usuelles.

Exercice 1 : [M1] Classer les suites suivantes :
$(n!)_{n\geq 1}, (\ln^2(n))_{n\geq 1}, (n^6)_{n\geq 1}, (3^n)_{n\geq 1}, ((1/2)^n)), (n^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2 : [M2] On pose $f(x) = \ln(\cos(x))$. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 3 : [M3] Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^{-x}$.

Exercice 4 : [M3] Déterminer : le $DL_3(0)$ de $2\sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 5 : [M3] Déterminer :

(a) le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\cos(x)}{1-x}$

(b) le $DL_3(0)$ de $e^x \times \sin(x)$.

(c) le $DL_4(0)$ de $(1+x)\ln(1+x)$.

(d) le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x} \times \sin(x)$.

Exercice 6 : [M3]

(Q 1) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\exp(x/(1+x))$.

(Q 2) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$ en effectuant une composition cette fois.

Exercice 7 : [M3] Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+\sin(x)}$ (b)$DL_5(0)$ de $\tan(x)$ en tant que quotient.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 22

Limites et équivalents de fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Déterminer un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point ;

-M2- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) au calcul de limites ;

-M3- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) à la recherche de tangentes et de position par rapport à cette dernière ;

-M4- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction (en particulier les asympotes obliques).

Exercice 1 : [M1] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

Exercice 2 : [M1] Déterminer un équivalent de :
$\ln(x)$ en 1; $\sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$

Exercice 3 : [M1] Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) e^x-e, $a=1$; (b) $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$, $a=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : [M1] Déterminer un équivalent simple de $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5 : [M1] **Composition d'un équivalent ?** Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f\underset{a}{\sim}g$ et que f est strictement positive au voisinage de a. Démontrer que si f admet une limite $\ell>0$ différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a. Qu'en est-il si f admet une limite égale à $+\infty$? égale à 0?

Exercice 6 : [M2] Calculer $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{x/2}}{\ln(1+x)-x}$.

Exercice 7 : [M2] Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

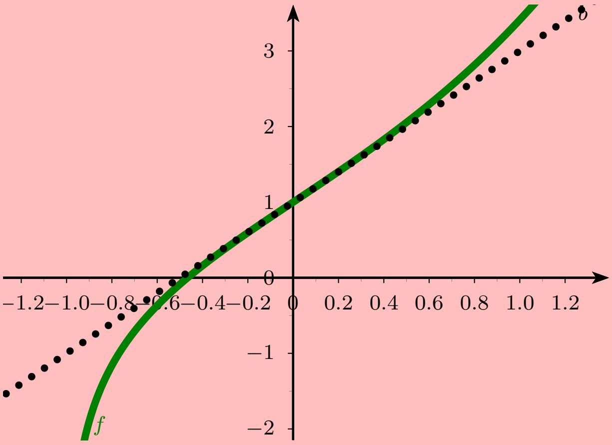
(a) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\cos(3x)-1}$;

(c) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$; (d) $\frac{x\ln(\cos(x))}{\tan(x)-x}$;

(e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$; (f) $g(x) = \frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})-\operatorname{ch}(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Exercice 8 : [M3]
Soit $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser la régularité de f sur cet ensemble.
2. Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 afin de donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la tangente en $A(0; f(0))$ et de la courbe représentative de f.



Exercice 9 : [M4] Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$. On donne une représentation de sa courbe représentative ci-dessous :