PROGRAMME DE COLLES 21

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Rang d'une famille de vecteurs : définition, énoncé et démonstration des inégalités vérifiées par le rang d'une famille de vecteurs.
2. Énoncé et démonstration de la caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
3. Montrer que toute famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.
4. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation de prépondérance.
5. Énoncé de la comparaison des suites de référence et démonstration de $a^n = o(n!)$.
6. Énoncer tous les développements limités usuels et démontrer les développements limités de $\dfrac{1}{1-x}$, $\exp$ et $\ln(1+x)$ en 0.

Note aux colleurs

Pas d'exercices originaux sur les développements limités cette semaine.

Thèmes de la colle

ESPACES VECTORIELS :

- Espaces vectoriels : définitions, espaces vectoriels classiques.
- Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisations pratiques.
- Familles de vecteurs : Combinaisons linéaires, famille libres, familles liées, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs, bases.
- Intersection, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires : définition et caractérisation.

DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL :

- Espaces vectoriels de dimension finie : bases d'un espace vectoriel, définition d'un espace vectoriel de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, espaces vectoriels de dimension finie classiques, familles libres et génératrices en dimension finie, théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sous-espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs, relation de Grassmann, caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- Espaces vectoriels de polynômes.

Prévisions pour la semaine suivante

Développements limités.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$

Chapitre 20

Dimension d'un espace vectoriel

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Simplifier l'étude de bases à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M2- Simplifier l'étude d'égalité d'espaces vectoriels à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M3- Calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel ;

-M4- Calculer le rang d'une famille de vecteurs ;

-M5- Simplifier l'étude de supplémentaires à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M6- Résoudre des problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie dans d'autres espaces que $\mathbb{K}^n$.

Exercice 1 : [-M 1-] Montrer que la famille :
$\mathcal{B} = \Big((1;1;1;1);(1;0;1;1);(1;2;0;0);(1;2;3;4)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 : [-M 3-] On note F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0 \right\} \text{ et}$$

$$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Calculer $\dim(F)$, $\dim(G)$ et $\dim(F \cap G)$.

Exercice 3 : [-M 2-] Montrer que :
$\mathrm{Vect}\Big((1;1;3);(2;-2;1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1;-3;-2);(1;5;8)\Big)$.

Exercice 4 : [-M 3-] Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que A est un espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donner $\dim(A)$.

Exercice 5 : [-M 3-] Soit F l'ensemble des solutions de l'équation $y' + y = 0$. Montrer que F, muni des lois de compositions internes et externes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, est un espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.

Exercice 6 : [-M 4-] Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de chacune des familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
2. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
3. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \right)$.

Exercice 7 : [-M 4-] Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \sin kx \text{ et } g_k(x) = \cos kx.$$

Déterminer le rang des familles

(Q 1) $\mathcal{F} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$

(Q 2) $\mathcal{H} = (g_0, f_1^2, g_2)$

Exercice 8 : [-M 5-] Soit $F = \text{Vect}\Big((0;0;1;0);(1;0;2;0)\Big)$ et $G = \text{Vect}\Big((0;1;0;1),(1;2;3;4)\Big)$.

(Q 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(Q 2) Donner alors la décomposition de $(x;y;z;t)$ dans $F+G$.

Exercice 9 : [-M 6-] Montrer que $\mathcal{F} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans $\mathcal{F}$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 21

Développements limités

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir comparer des suites ou fonctions au voisinage d'un point.

-M2- Connaître les théorèmes généraux sur les développements limités usuels.

-M3- Savoir calculer le développement limité en un point à un ordre fixé par opérations usuelles.

Exercice 1 : [M1] Classer les suites suivantes :
$(n!)_{n\geq 1}, (\ln^2(n))_{n\geq 1}, (n^6)_{n\geq 1}, (3^n)_{n\geq 1}, ((1/2)^n)), (n^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2 : [M2] On pose $f(x) = \ln(\cos(x))$. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 3 : [M3] Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^{-x}$.

Exercice 4 : [M3] Déterminer : le $DL_3(0)$ de $2\sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 5 : [M3] Déterminer :

(a) le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\cos(x)}{1-x}$

(b) le $DL_3(0)$ de $e^x \times \sin(x)$.

(c) le $DL_4(0)$ de $(1+x)\ln(1+x)$.

(d) le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x} \times \sin(x)$.

Exercice 6 : [M3]

(Q 1) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\exp(x/(1+x))$.

(Q 2) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$ en effectuant une composition cette fois.

Exercice 7 : [M3] Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+\sin(x)}$ (b)$DL_5(0)$ de $\tan(x)$ en tant que quotient.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆