PROGRAMME DE COLLES 21

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncer tous les développements limités usuels et démontrer les développements limités de $\dfrac{1}{1-x}$, $\exp$ et $\ln(1+x)$ en 0.
2. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation de prépondérance.
3. Énoncé de la comparaison des suites de référence et démonstration de $a^n = o(n!)$.
4. Énoncé et démonstration des opérations usuelles pour la relation d'équivalence.

Thèmes de la colle

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET RELATION DE PRÉPONDÉRANCE :

— Relations de négligeabilité : définition, opérations usuelles, comparaisons des fonctions et des suites de référence .

— Généralités : définitions, unicité des coefficients d'un développement limité, troncature d'un $DL_n(x_0)$ pour obtenir un $DL_p(x_0)$, avec $p \leq n$, coefficients du $DL_n(0)$ de fonctions paires et impaires, développements limités à l'ordre 1 et fonctions dérivables, intégration d'un développement limité ;

— Développements limités usuels en 0 : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\tan(x)$ (uniquement à l'ordre 3) ;

— Opérations usuelles : combinaison linéaire, produit, composition, quotient.

ÉQUIVALENTS ET LIMITES DE SUITES ET FONCTIONS :

— Suites et fonctions équivalentes : définition, propriétés, équivalents usuels, opérations usuelles, équivalents de suites polynômiales, équivalents et limites, équivalents et inégalités.

Prévisions pour la semaine suivante

Équivalents et limites de suites fonctions en entier.

Note aux colleurs

Pas de de recherche de limites, étude d'extrêma locaux, position d'une courbe par rapport à sa tangente, développements limités et asymptotes au programme de colle de cette semaine.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 21

Développements limités

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Savoir comparer des suites ou fonctions au voisinage d'un point.

-M2- Connaître les théorèmes généraux sur les développements limités usuels.

-M3- Savoir calculer le développement limité en un point à un ordre fixé par opérations usuelles.

Exercice 1 : [M1] Classer les suites suivantes :
$(n!)_{n\geq 1}, (\ln^2(n))_{n\geq 1}, (n^6)_{n\geq 1}, (3^n)_{n\geq 1}, ((1/2)^n)), (n^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2 : [M2] On pose $f(x) = \ln(\cos(x))$. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 3 : [M3] Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^{-x}$.

Exercice 4 : [M3] Déterminer : le $DL_3(0)$ de $2\sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 5 : [M3] Déterminer :

(a) le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\cos(x)}{1-x}$

(b) le $DL_3(0)$ de $e^x \times \sin(x)$.

(c) le $DL_4(0)$ de $(1+x)\ln(1+x)$.

(d) le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x} \times \sin(x)$.

Exercice 6 : [M3]

(Q 1) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\exp(x/(1+x))$.

(Q 2) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$ en effectuant une composition cette fois.

Exercice 7 : [M3] Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+\sin(x)}$ (b)$DL_5(0)$ de $\tan(x)$ en tant que quotient.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 22

Limites et équivalents de fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Déterminer un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point ;

-M2- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) au calcul de limites ;

-M3- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) à la recherche de tangentes et de position par rapport à cette dernière ;

-M4- Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction (en particulier les asympotes obliques).

Exercice 1 : [M1] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

Exercice 2 : [M1] Déterminer un équivalent de :
$\ln(x)$ en 1; $\sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$

Exercice 3 : [M1] Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) e^x-e, $a=1$; (b) $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$, $a=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : [M1] Déterminer un équivalent simple de $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5 : [M1] **Composition d'un équivalent ?** Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f \underset{a}{\sim} g$ et que f est strictement positive au voisinage de a. Démontrer que si f admet une limite $\ell>0$ différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a. Qu'en est-il si f admet une limite égale à $+\infty$? égale à 0?

Exercice 6 : [M2] Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{x/2}}{\ln(1+x)-x}$.

Exercice 7 : [M2] Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

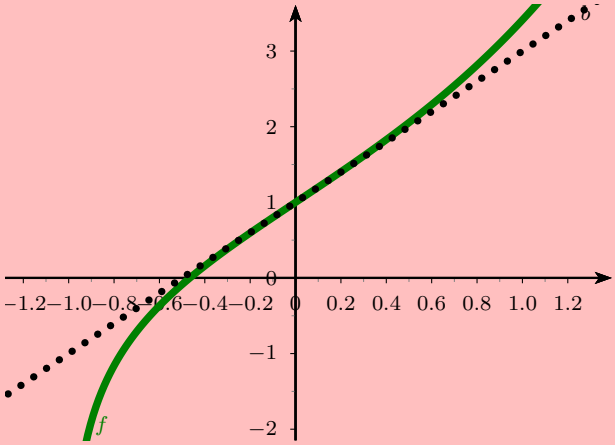
(a) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\cos(3x)-1}$;

(c) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$; (d) $\frac{x\ln(\cos(x))}{\tan(x)-x}$;

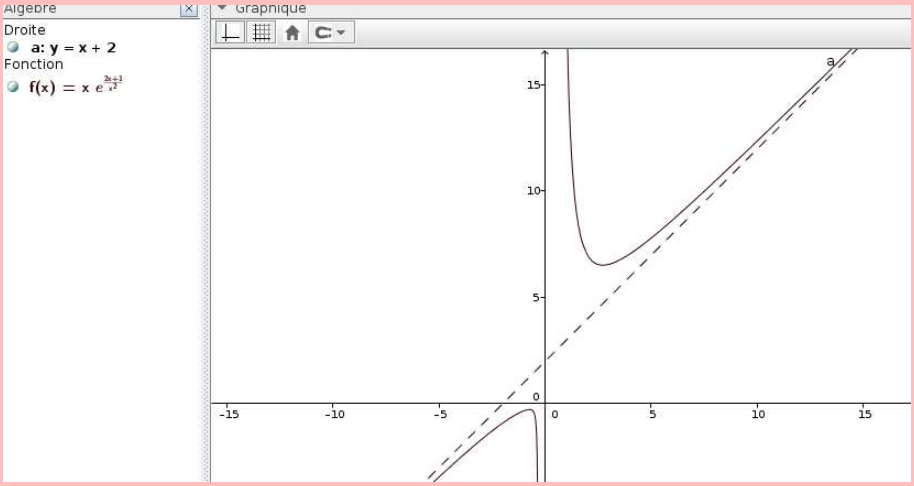
(e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$; (f) $g(x) = \frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2})-\mathrm{ch}(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Exercice 8 : [M3]
Soit $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser la régularité de f sur cet ensemble.
2. Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 afin de donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la tangente en $A(0; f(0))$ et de la courbe représentative de f.



Exercice 9 : [M4] Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$. On donne une représentation de sa courbe représentative ci-dessous :



⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆