PROGRAMME DE COLLES 19

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
3. Définitions de famille libre et famille liée. Montrer que si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et $\overrightarrow{u} \notin \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u})$ est libre.
4. Rang d'une famille de vecteurs : définition, énoncé et démonstration des inégalités vérifiées par le rang d'une famille de vecteurs.
5. Énoncé et démonstration de la caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
6. Montrer que toute famille de polynômes de degrés échelonnés est libre.

Note aux colleurs

L'algèbre linéaire chez les polynômes est au programme mais à noter avec indulgence car les étudiants auront fait peu d'exercices sur ce thème.

Thèmes de la colle

ESPACES VECTORIELS :
- Espaces vectoriels : définitions, espaces vectoriels classiques.
- Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisations pratiques.
- Familles de vecteurs : Combinaisons linéaires, famille libres, familles liées, sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs, bases.
- Intersection, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires : définition et caractérisation.

DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL :
- Espaces vectoriels de dimension finie : bases d'un espace vectoriel, définition d'un espace vectoriel de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, espaces vectoriels de dimension finie classiques, familles libres et génératrices en dimension finie, théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sous-espace vectoriel, rang d'une famille de vecteurs, relation de Grassmann, caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- Espaces vectoriels de polynômes.

Prévisions pour la semaine suivante

Développements limités.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 19

Espaces vectoriels

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Manipuler la notion de combinaison linéaire et de vecteurs dans d'autres espaces que ceux issus de la géométrie usuelle ;

-M2- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ;

-M3- Étudier l'intersection ou la somme de sous -espaces vectoriels ;

-M4- Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ;

-M5- Montrer qu'une famille est libre ou non ;

-M6- Montrer qu'une famille est génératrice ou non.

Exercice 1 : [M1] La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 2 : [M2] Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : [M3] Soit le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni des lois de composition interne et externe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exercice 4 : [M3] Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Montrer que F est engendré par une famille de vecteurs et est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5 : [M3] On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 6 : [M3] Soit $A = \text{Vect}\Big((1, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 0, 1)\Big)$ et $B = \text{Vect}((1, 0, 0))$.

1. Donner explicitement les éléments de A et de B.
2. Peut-on simplifier A?
3. Montrer que $A + B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : [M3] Soit $F = \Big\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\Big\}, G = \text{Vect}\Big((1; 1; 1)\Big); H = \Big\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\Big\}$. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ? de même pour F et H ?

Exercice 8 : [M4]

1. Déterminer si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$ et $G = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. Si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, donner la décomposition de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans ces deux-espaces supplémentaires.

Exercice 9 : [M6] Montrer que : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : [M5 - M6] $B = \{\begin{pmatrix} a & a+b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que B est engendré par une famille de deux vecteurs que l'on précisera puis tester la liberté de cette dernière.

Exercice 11 : [M5] On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soient g_0, g_1, g_2 les trois vecteurs de E définis par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$
donc $g_i(x) = x^i$. La famille $\left(g_0; g_1; g_2\right)$ est-elle libre ou liée ?
2. Soient f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$
Étudier la liberté des famille $(f_1; f_2)$ et $\left(f_1; f_2; f_3\right)$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 20

Dimension d'un espace vectoriel

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Simplifier l'étude de bases à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M2- Simplifier l'étude d'égalité d'espaces vectoriels à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M3- Calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel ;

-M4- Calculer le rang d'une famille de vecteurs ;

-M5- Simplifier l'étude de supplémentaires à l'aide de l'outil « dimension » ;

-M6- Résoudre des problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie dans d'autres espaces que $\mathbb{K}^n$.

Exercice 1 : [-M 1-] Montrer que la famille :
$\mathcal{B} = \Big((1;1;1;1);(1;0;1;1);(1;2;0;0);(1;2;3;4)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 : [-M 3-] On note F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0 \right\} \text{ et}$$

$$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Calculer $\dim(F)$, $\dim(G)$ et $\dim(F \cap G)$.

Exercice 3 : [-M 2-] Montrer que :
$\mathrm{Vect}\Big((1;1;3);(2;-2;1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1;-3;-2);(1;5;8)\Big)$.

Exercice 4 : [-M 3-] Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que A est un espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donner $\dim(A)$.

Exercice 5 : [-M 3-] Soit F l'ensemble des solutions de l'équation $y' + y = 0$. Montrer que F, muni des lois de compositions internes et externes de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.

Exercice 6 : [-M 4-] Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de chacune des familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
2. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
3. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \right)$.

Exercice 7 : [-M 4-] Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \sin kx \text{ et } g_k(x) = \cos kx.$$

Déterminer le rang des familles

(Q 1) $\mathcal{F} = (f_1,\ f_2,\ f_3)$

(Q 2) $\mathcal{H} = (g_0, f_1^2, g_2)$

Exercice 8 : [-M 5-] Soit $F = \mathrm{Vect}\Big((0;0;1;0);(1;0;2;0)\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big((0;1;0;1),(1;2;3;4)\Big)$.

(Q 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(Q 2) Donner alors la décomposition de $(x;y;z;t)$ dans $F+G$.

Exercice 9 : [-M 6-] Montrer que $\mathcal{F} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans $\mathcal{F}$.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆