PROGRAMME DE COLLES 18

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Définition et propriétés du déterminant de trois vecteurs. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$, alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ;
2. Définition et propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Énoncer et démontrer l'expression du produit vectoriel en base orthonormale directe ;
3. Énoncé de :
   - la relation de divisibilité ;
   - la propriété de division euclidienne.

   Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.
4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme à coefficient réel alors $\overline{\alpha}$ également.
5. Énoncé des relations coefficients/racines et démonstration des relations pour $n = 3$.

Thèmes de la colle

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE :

— Vecteurs de l'espace : vecteurs coplanaires, base de l'espace, équivalence entre vecteurs non coplanaires et bases de l'espace ;
— Produit scalaire de deux vecteurs : définition, propriétés, expression en base orthonormale ;
— Produit vectoriel de deux vecteurs : définition, produit vectoriel et vecteurs colinéaires, propriétés,expression en BON directe, application au calcul d'aires ;
— Déterminant de trois vecteurs : défininition, déterminant et bases de l'espace, déterminant et bases directes, propriétés,expression en BON directe, application au calcul de volumes ;
— Plans de l'espace : équation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan, intersection de deux plans ;
— Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan ;
— Droites de l'espace : représentation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à une droite, intersection d'une sphère et d'une droite.

POLYNÔMES :

— Généralités : définition, opérations, degré d'un polynôme, division euclidienne, diviseurs et multiples.
— Polynômes dérivés et racines d'un polynôme : racine d'un polynôme, dérivées successives, multiplicité d'une racine.
— Factorisations d'un polynôme : décomposition en polynômes irréductibles, polynômes scindés, factorisations dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, relations coefficients/racines (somme et produit uniquement).
— Application de la division euclidienne au calcul de puissance de matrices.

Prévisions pour la semaine suivante

Espaces vectoriels.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 17

Géométrie dans l'espace

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Manipuler les notions de base et de repère de l'espace.

-M2- Utiliser le calcul vectoriel pour caractériser l'orthogonalité, la colinéarité, la coplanéarité.

-M3- Manipuler les différentes représentations d'une droite, d'un plan dans l'espace.

-M4- Idem avec les sphères et les cercles.

Exercice 1 : [M1] On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormale directe usuelle et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

1. En utilisant la définition, montrer que le vecteur de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Cette famille est-elle une base de l'espace ?
2. En utilisant la caractérisation des bases par les 3 vecteurs non coplanaires, montrer que cette famille est une base de l'espace.

Exercice 2 : [M2] Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis déterminer une base ortho**normale** directe à l'aide de ces vecteurs.

Exercice 3 : [M2] En notant $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 2)$, calculer l'aire du triangle OAB.

Exercice 4 : [M3] Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Exercice 5 : [M3] Déterminer une équation paramétrique du plan d'équation cartésienne : $x+2y+3z-1 = 0$.

Exercice 6 : [M3] Déterminer une représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7 : [M3] Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne : $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Exercice 8 : [M3] Soit $\mathcal{P} = A(1,1,1) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t = O(0,0,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}t+1\\t\\t\end{pmatrix}\right)$.

(Q 1) Quelle est la nature de $\mathcal{P}$? de $\mathcal{D}_t$?

(Q 2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t \subset \mathcal{P}$.

Exercice 9 : [M2-M3] Calculer la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=1$ puis à la droite (AB), avec $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

Exercice 10 : [M4] Montrer que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2-4x+y^2+6y+z^2-2z-23=0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11 : [M4] Déterminer l'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ avec la droite (AB), où $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

Exercice 12 : [M4] Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 13 : [M4] Soit la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon 1 puis la droite $\mathcal{D} = A(1,1,1) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que cette droite est contenue dans deux plans tangents à cette sphère.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 18

Polynômes

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

-M1- Maîtriser le degré d'un polynôme.

-M2- Maîtriser l'expression des coefficients d'un produit de polynômes.

-M3- Savoir manipuler la relation de divisibilité et effectuer une division euclidienne quelconque.

-M4- Savoir faire une décomposition en éléments simples élémentaire.

-M5- Connaître la notion de racines simples et multiples ainsi que leur lien avec la factorisation du polynôme.

-M6- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

-M7- Savoir manipuler les relations coefficients/racines.

Exercice 1 : [M1] Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P^2 = \frac{1}{2}X^3P'$. On note $p = \deg(P)$.

1. Exprimer $\deg(P^2)$ et $\deg\left(\frac{1}{2}X^3P'\right)$ en fonction de p.
2. En déduire les valeurs possibles de p puis la forme de P.
3. Étudier la réciproque.

Exercice 2 : [M2] On pose : $P = (X+1)^n$.

1. Montrer que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec a_k à expliciter.
2. En utilisant la formule du produit de polynômes expliciter la valeur du coefficient de degré k de P^2.
3. En remarquant que $P^2 = (X+1)^{2n}$, en déduire la formule : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 : [M4] Décomposer en éléments simples les expressions R suivantes puis calculer l'intégrale proposée :

(a) $R = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$;

(b) $R = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$;

(c) $R = \dfrac{X^4-11}{X^2+4}$, $I = \displaystyle\int_{0}^{2} R(t)\,dt$;

(d) $R = \dfrac{X^2+2X+1}{X^3-1}$, $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} R(t)\,dt$.

Exercice 4 : [M5] Déterminer les racines complexes de X^3+1, X^4-1.

Exercice 5 : [M5] On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

(Q 1) Vérifier que si α est racine de P, alors $\alpha+1$ également puis que P admet une infinité de racines.

(Q 2) Conclure.

Exercice 6 : [M5] Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ et déterminer sa multiplicité. En déduire la factorisation de P.

Exercice 7 : [M6] Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : X^2+X+1; X^6-1; X^4+X^2+1.

Exercice 8 : [M7] Soit $n \geq 2$. Pour $P = X^n - 1$ Donner la somme des racines (n-èmes de l'unité) et le produit des racines de P..

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆