

PROGRAMME DE COLLES 17

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Définition et propriétés du déterminant de trois vecteurs. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires,
2. Définition et propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Énoncer et démontrer l'expression du produit vectoriel en base orthonormale directe.
3. Énoncer et démontrer la formule du calcul de la distance d'un point à une droite. Appliquer la formule dans une situation proposée par l'examinateur.
4. Énoncé de la relation de divisibilité et de la propriété de division euclidienne. Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.
5. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine d'un polynôme à coefficient réel alors $\bar{\alpha}$ également.
6. Énoncé des relations coefficients/racines et démonstration des relations pour $n = 3$.

Thèmes de la colle

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE :

- Vecteurs de l'espace : vecteurs coplanaires, base de l'espace, équivalence entre vecteurs non coplanaires et bases de l'espace ;
- Produit scalaire de deux vecteurs : définition, propriétés, expression en base orthonormale ;
- Produit vectoriel de deux vecteurs : définition, produit vectoriel et vecteurs colinéaires, propriétés vérifiées par le produit vectoriel, expression en base orthonormale directe, application au calcul d'aires de triangles et de parallélogrammes ;
- Déterminant de trois vecteurs : définition, déterminant et bases de l'espace, déterminant et bases directes, propriétés vérifiées par le déterminant, expression en base orthonormale directe, application au calcul de volumes ;
- Plans de l'espace : équation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan, intersection de deux plans ;
- Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan ;
- Droites de l'espace : représentation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à une droite, intersection d'une sphère et d'une droite.

POLYNÔMES :

- Généralités : définition, opérations, degré d'un polynôme, division euclidienne, diviseurs et multiples.
- Polynômes dérivés et racines d'un polynôme : racine d'un polynôme, dérivées successives, multiplicité d'une racine.
- Factorisations d'un polynôme : décomposition en polynômes irréductibles, polynômes scindés, factorisations dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, relations coefficients/racines (somme et produit uniquement).
- Application de la division euclidienne au calcul de puissance de matrices.

Prévisions pour la semaine suivante

Espaces vectoriels.

Géométrie dans l'espace**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Manipuler les notions de base et de repère de l'espace.
- M2- Utiliser le calcul vectoriel pour caractériser l'orthogonalité, la colinéarité, la coplanéarité.
- M3- Manipuler les différentes représentations d'une droite, d'un plan dans l'espace.
- M4- Idem avec les sphères et les cercles.

Exercice 1 : [M1] On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base orthonormale directe usuelle et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. En utilisant la définition, montrer que le vecteur de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Cette famille est-elle une base de l'espace ?
2. En utilisant la caractérisation des bases par les 3 vecteurs non coplanaires, montrer que cette famille est une base de l'espace.

Exercice 2 : [M2] Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis déterminer une base orthonormale directe à l'aide de ces vecteurs.

Exercice 3 : [M2] En notant $A(1; 0; 1)$ et $B(0; 1; 2)$, calculer l'aire du triangle OAB .

Exercice 4 : [M3] Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1; 1; 1)$ et de vecteur orthogonal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Exercice 5 : [M3] Déterminer une équation paramétrique du plan d'équation cartésienne : $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Exercice 6 : [M3] Déterminer une représentation cartésienne de la droite passant par $A(1; 1; 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 : [M3] Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne :

$$\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 8 : [M3] Soit $\mathcal{P} = A(1, 1, 1) + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t = O(0, 0, 0) + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \right)$.

(Q 1) Quelle est la nature de $\mathcal{P}$? de $\mathcal{D}_t$?

(Q 2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t \subset \mathcal{P}$.

Exercice 9 : [M2-M3] Calculer la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$ puis à la droite (AB) , avec $A(1; 0; 1)$ et $B(0; 1; 0)$.

Exercice 10 : [M4] Montrer que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 2z - 23 = 0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11 : [M4] Déterminer l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec la droite (AB) , où $A(1; 0; 1)$ et $B(0; 1; 0)$.

Exercice 12 : [M4] Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 13 : [M4] Soit la sphère de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon 1 puis la droite $\mathcal{D} = A(1, 1, 1) + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que cette droite est contenue dans deux plans tangents à cette sphère.



Chapitre 18

Polynômes

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1- Maîtriser le degré d'un polynôme.
- M2- Maîtriser l'expression des coefficients d'un produit de polynômes.
- M3- Savoir manipuler la relation de divisibilité et effectuer une division euclidienne quelconque.
- M4- Savoir faire une décomposition en éléments simples élémentaire.
- M5- Connaître la notion de racines simples et multiples ainsi que leur lien avec la factorisation du polynôme.
- M6- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- M7- Savoir manipuler les relations coefficients/racines.

Exercice 1 : [M1] Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P^2 = \frac{1}{2}X^3P'$. On note $p = \deg(P)$.

1. Exprimer $\deg(P^2)$ et $\deg(\frac{1}{2}X^3P')$ en fonction de p .
2. En déduire les valeurs possibles de p puis la forme de P .
3. Étudier la réciproque.

Exercice 2 : [M2] On pose : $P = (X + 1)^n$.

1. Montrer que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec a_k à expliciter.
2. En utilisant la formule du produit de polynômes expliciter la valeur du coefficient de degré k de P^2 .
3. En remarquant que $P^2 = (X + 1)^{2n}$, en déduire la formule : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 : [M4] Décomposer en éléments simples les expressions R suivantes puis calculer l'intégrale proposée :

(a) $R = \frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt;$

(b) $R = \frac{X^2 + X + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt;$

(c) $R = \frac{X^4 - 11}{X^2 + 4}, I = \int_0^2 R(t) dt;$

(d) $R = \frac{X^2 + 2X + 1}{X^3 - 1}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt.$

Exercice 4 : [M5] Déterminer les racines complexes de $X^3 + 1$, $X^4 - 1$.

Exercice 5 : [M5] On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X + 1) = P(X)$.

(Q 1) Vérifier que si α est racine de P , alors $\alpha + 1$ également puis que P admet une infinité de racines.

(Q 2) Conclure.

Exercice 6 : [M5] Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ et déterminer sa multiplicité. En déduire la factorisation de P .

Exercice 7 : [M6] Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $X^2 + X + 1$; $X^6 - 1$; $X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 8 : [M7] Soit $n \geq 2$. Pour $P = X^n - 1$ Donner la somme des racines (n -èmes de l'unité) et le produit des racines de P .

