# PROGRAMME DE COLLES 16

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

## Questions de cours

1. Définition et propriétés du produit scalaire. Énoncer et démontrer l'expression du produit scalaire en base orthonormale ;
2. Définition et propriétés du déterminant. Énoncé et démonstration de la formule de l'aire d'un parallélogramme à partir du déterminant ;
3. Énoncé et démonstration de la formule de la distance d'un point $A$ à une droite $\mathcal{D}$ ;
4. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ;
5. Définition et propriétés du déterminant de trois vecteurs. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer que si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$, alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ;
6. Définition et propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace. Énoncer et démontrer l'expression du produit vectoriel en base orthonormale directe ;

## Thèmes de la colle

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN :

- Vecteurs du plan : opérations sur les vecteurs, colinéarité de deux vecteurs, angles orientés de deux vecteurs, bases du plan, composantes de vecteurs dans une base quelconque.
- Produit scalaire : définition, interprétation géométrique, caractérisation de l'orthogonalité à l'aide du produit scalaire, calcul en base orthonormale.
- Déterminant : définition, caractérisation des bases et bases directes, calcul en BON directe, application au calcul d'aires .
- Géométrie en coordonnées cartésiennes : Repères cartésiens, équations cartésiennes de droites, distance d'un point à une droite, équations cartésiennes de cercles, intersections entre : deux droites, une droite et un cercle.
- Représentations paramétriques : Représentations paramétriques de droites, calculs de coordonnées polaires.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE :

- Vecteurs de l'espace : vecteurs coplanaires, base de l'espace, équivalence entre vecteurs non coplanaires et bases de l'espace ;
- Produit scalaire de deux vecteurs : définition, propriétés, expression en base orthonormale ;
- Produit vectoriel de deux vecteurs : définition, produit vectoriel et vecteurs colinéaires, propriétés,expression en BON directe, application au calcul d'aires ;
- Déterminant de trois vecteurs : défininition, déterminant et bases de l'espace, déterminant et bases directes, propriétés,expression en BON directe, application au calcul de volumes ;
- Plans de l'espace : équation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan, intersection de deux plans ;
- Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan ;
- Droites de l'espace : représentation cartésienne, représentation paramétrique, distance d'un point à une droite, intersection d'une sphère et d'une droite.

## Prévisions pour la semaine suivante

Polynômes.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

Chapitre 16

# Géométrie dans le plan

**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Manipuler les notions de base et de repère du plan.

-M2- Utiliser les outils de calcul vectoriel.

-M3- Caractériser une droite et en obtenir une équation.

-M4- Idem pour les cercles.

-M5- Étudier des problèmes d'intersection entre droites et cercles.

*Exercice 1 :* [M1] Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$?

*Exercice 2 :* [M1]

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan.
2. Quelles sont les coordonnées des points $M(1,1), N(2,3)$ dans le nouveau repère : $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$?

*Exercice 3 :* [M2]

Dans une base orthonormale directe, soit $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner :

1. $\overrightarrow{v_1}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1})$ soit une base du plan,
2. $\overrightarrow{v_2}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})$ soit une base orthonormale directe du plan,
3. $\overrightarrow{v_3}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_3})$ soit une base orthonormale indirecte du plan.

*Exercice 4 :* [M2] Soient $A, B, C$ trois points du plan distincts deux à deux. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \textit{(formule d'Al-Kashi)}.$$

*Exercice 5 :* [M2] Dans $\mathcal{R}$, un repère orthonormé direct, soient $A(3;\ 1)$, $B(0;\ -1)$ et $C(-1;\ 2)$.

1. Montrer que le triangle $ABC$ n'est pas isocèle.
2. Déterminer l'aire du triangle $ABC$.

*Exercice 6* : [M3]

1. La droite $(AB)$, avec $A(1;\ 0)$ et $B(0;\ 1)$ ;
2. la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $A$ ;
3. La droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par $B$.

*Exercice 7* : [M3] Soit l'ensemble :

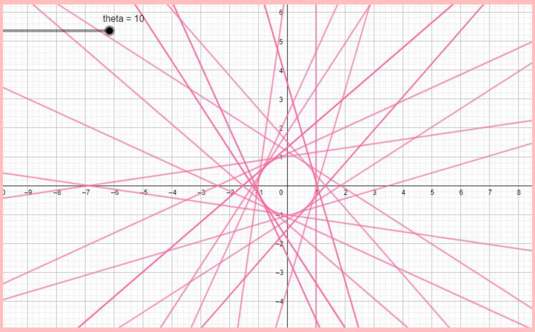
$$\mathcal{D}:\ \forall t \in \mathbb{R};\begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

1. Quel est cet ensemble de points ? Donner ses éléments caractéristiques puis une équation cartésienne.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $B(1;\ 1)$ sur $\mathcal{D}$.

*Exercice 8* : [M3]

Soit $\mathcal{D}_\theta$ : $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce couple de réels afin que $\mathcal{D}_\theta$ et $\mathcal{D}_{\theta'}$ soient perpendiculaires.
2. Donner alors le point d'intersection de ces deux droites perpendiculaires.




*Exercice 9* : [M4] Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y = x^2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x - 5$. Trouver le point $M \in \mathcal{P}$ tel que la distance de $M$ à la droite $\mathcal{D}$ est minimale.

*Exercice 10* : [M4] Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2 + y^2 + 6y - 23 = 4x$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

*Exercice 11* : [M5]

1. Identifier la nature de l'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
2. Si l'intersection est un point, déterminer ses coordonnées.

*Exercice 12* : [M5] Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2 et soit $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $J(0; 1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ pour $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Étudier suivant les valeurs de $m$ l'intersection entre ces deux objets.

Chapitre 17

# Géométrie dans l'espace

**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Manipuler les notions de base et de repère de l'espace.

-M2- Utiliser le calcul vectoriel pour caractériser l'orthogonalité, la colinéarité, la coplanéarité.

-M3- Manipuler les différentes représentations d'une droite, d'un plan dans l'espace.

-M4- Idem avec les sphères et les cercles.

*Exercice 1 :* [M1] On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormale directe usuelle et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

1. En utilisant la définition, montrer que le vecteur de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Cette famille est-elle une base de l'espace ?
2. En utilisant la caractérisation des bases par les 3 vecteurs non coplanaires, montrer que cette famille est une base de l'espace.

*Exercice 2 :* [M2] Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis déterminer une base ortho**normale** directe à l'aide de ces vecteurs.

*Exercice 3 :* [M2] En notant $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 2)$, calculer l'aire du triangle $OAB$.

*Exercice 4 :* [M3] Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

*Exercice 5 :* [M3] Déterminer une équation paramétrique du plan d'équation cartésienne : $x+2y+3z-1 = 0$.

*Exercice 6 :* [M3] Déterminer une représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Exercice 7 :* [M3] Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne : $\left\{\begin{array}{l} x+z+1=0 \\ x-z=0 \end{array}\right.$.

*Exercice 8 :* [M3] Soit $\mathcal{P} = A(1,1,1) + \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t = O(0,0,0) + \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ t \end{pmatrix}\right)$.

(Q 1) Quelle est la nature de $\mathcal{P}$? de $\mathcal{D}_t$?

(Q 2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t \subset \mathcal{P}$.

*Exercice 9 :* [M2-M3] Calculer la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=1$ puis à la droite $(AB)$, avec $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

*Exercice 10 :* [M4] Montrer que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2-4x+y^2+6y+z^2-2z-23=0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

*Exercice 11 :* [M4] Déterminer l'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ avec la droite $(AB)$, où $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

*Exercice 12 :* [M4] Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

*Exercice 13 :* [M4] Soit la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $1$ puis la droite $\mathcal{D} = A(1,1,1) + \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que cette droite est contenue dans deux plans tangents à cette sphère.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆