

PROGRAMME DE COLLES 15

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncés du théorème de Rolle et de l'égalité des accroissements finis avec interprétation graphique. Démonstration de l'égalité des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.
2. Énoncés du théorème de limite de la dérivée et du théorème de prolongement de classe C^1 d'une fonction. Démonstration du théorème de prolongement de classe C^1 d'une fonction à partir du théorème de limite de la dérivée.
3. Définitions de fonctions de classes C^k , $\mathcal{D}^k$, classes C^∞ , énoncé des inclusions entre : C^{n+1} , C^n , $\mathcal{D}^{n+1}$. Démonstration des inclusions pour $n = 0$ et $n = 1$.
4. Définition et propriétés du produit scalaire. Énoncer et démontrer l'expression du produit scalaire en base orthonormale;
5. Définition et propriétés du déterminant. Énoncé et démonstration de la formule de l'aire d'un parallélogramme à partir du déterminant;
6. Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Thèmes de la colle

RÉGULARITÉS DES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE :

- Fonctions dérivables : dérivabilité, dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite, extréma d'une fonction dérivable, théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée.
- Fonctions de classe C^1 : comparaison avec les fonctions continues et les fonctions dérivables, opérations usuelles, théorème de limite de la dérivée et de prolongement de classe C^1 d'une fonction.
- Régularités d'ordres supérieurs et dérivées successives : fonctions n -fois dérivables, de classe C^n , de classe C^∞ , opérations usuelles.
- Calculs de dérivées n -ème : utilisation de la récurrence, dérivées n -èmes classiques $(\frac{1}{x}, e^{\alpha x}, x^\alpha)$, formule de Leibniz.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN :

- Vecteurs du plan : opérations sur les vecteurs, colinéarité de deux vecteurs, angles orientés de deux vecteurs, bases du plan, composantes de vecteurs dans une base quelconque.
- Produit scalaire : définition, interprétation géométrique, caractérisation de l'orthogonalité à l'aide du produit scalaire, calcul en base orthonormale.
- Déterminant : définition, caractérisation des bases et bases directes, calcul en base orthonormale directe, application au calcul d'aires de triangles et de parallélogrammes.
- Géométrie en coordonnées cartésiennes : Repères cartésiens, calculs des composantes de $\overrightarrow{AB}$ en fonction des coordonnées de A et B dans un repère cartésien, équations cartésiennes de droites, distance d'un point à une droite, équations cartésiennes de cercles, intersections entre : deux droites, une droite et un cercle.
- Représentations paramétriques : Représentations paramétriques de droites, calculs de coordonnées polaires.

Prévisions pour la semaine suivante

Géométrie dans l'espace..

Chapitre 15

Dérivabilité et régularités d'ordres supérieurs

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Étudier la dérivabilité ainsi que les régularités d'ordres supérieurs en un point ;
- M2- Utiliser le théorème de Rolle, les accroissements finis ;
- M3- Effectuer des calculs de dérivées n-ièmes de fonctions.

Exercice 1 : [M2] Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ ax + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ À quelle condition sur a , la fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 : [M2] Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

Exercice 3 : [M2] On pose : $f(x) = (x - 1)\text{Arcsin}(\sqrt{x})$ définie sur $[0; 1]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; 1[$.
2. Montrer f' admet une limite finie en 1 que l'on précisera. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 : [M2] Pour un entier naturel $n \geq 2$, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois zéros réels. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 5 : [M2] (application à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n), u_0 \in \mathbb{R}$.) Soit $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, u_0 \geq -2$. On admet que la suite est bien définie et que : $\forall n \geq 1; u_n \geq 0$.

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \geq 0; |f(x) - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 2|.$$

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$ puis que :

$$\forall n \geq 1; |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1} |u_1 - 2|.$$

3. Conclure sur le comportement asymptotique de cette suite.

Exercice 6 : [M1] Soit $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Exercice 7 : [M1] On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
 f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8 : [M3] Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ où P_n est une fonction polynômiale de degré n . Déterminer P_0 , P_1 et donner une relation entre P_{n+1} , P_n et P'_n .

Exercice 9 : [M3] On pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. Montrer que f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et en vous aidant de la formule de Leibniz montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Exercice 10 : [M3] Calculer la dérivée n ième de $x \mapsto \cos(x) \times \exp(x)$ ou de $\sin \times \exp$ en allant dans $\mathbb{C}$.



Géométrie dans le plan**Le point sur les méthodes :**

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Manipuler les notions de base et de repère du plan.
- M2- Utiliser les outils de calcul vectoriel.
- M3- Caractériser une droite et en obtenir une équation.
- M4- Idem pour les cercles.
- M5- Étudier des problèmes d'intersection entre droites et cercles.

Exercice 1 : [M1] Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$?

Exercice 2 : [M1]

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.
2. Quelles sont les coordonnées des points $M(1, 1)$, $N(2, 3)$ dans le nouveau repère : $(O; \vec{u}; \vec{v})$?

Exercice 3 : [M2]

Dans une base orthonormale directe, soit $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner :

1. $\vec{v}_1$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ soit une base du plan,
2. $\vec{v}_2$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}_2)$ soit une base orthonormale directe du plan,
3. $\vec{v}_3$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}_3)$ soit une base orthonormale indirecte du plan.

Exercice 4 : [M2] Soient A, B, C trois points du plan distincts deux à deux. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \quad (\text{formule d'Al-Kashi}).$$

Exercice 5 : [M2] Dans $\mathcal{R}$, un repère orthonormé direct, soient $A(3; 1)$, $B(0; -1)$ et $C(-1; 2)$.

1. Montrer que le triangle ABC n'est pas isocèle.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC .

Exercice 6 : [M3]

1. La droite (AB) , avec $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$;
2. la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ;
3. La droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par B .

Exercice 7 : [M3] Soit l'ensemble :

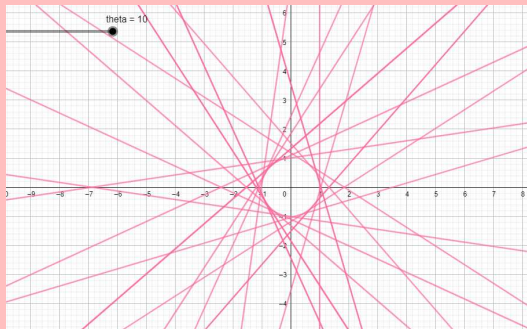
$$\mathcal{D} : \forall t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

1. Quel est cet ensemble de points? Donner ses éléments caractéristiques puis une équation cartésienne.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $B(1; 1)$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 8 : [M3]

Soit $\mathcal{D}_\theta : \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce couple de réels afin que $\mathcal{D}_\theta$ et $\mathcal{D}_{\theta'}$ soient perpendiculaires.
2. Donner alors le point d'intersection de ces deux droites perpendiculaires.



Exercice 9 : [M4] Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y = x^2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x - 5$. Trouver le point $M \in \mathcal{P}$ tel que la distance de M à la droite $\mathcal{D}$ est minimale.

Exercice 10 : [M4] Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2 + y^2 + 6y - 23 = 4x$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 11 : [M5]

1. Identifier la nature de l'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
2. Si l'intersection est un point, déterminer ses coordonnées.

Exercice 12 : [M5] Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2 et soit $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $J(0; 1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ pour $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Étudier suivant les valeurs de m l'intersection entre ces deux objets.