PROGRAMME DE COLLES 14

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Définition de la transposée d'une matrice et montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.
2. Définition de matrice inversible. Énoncer et démontrer les propriétés des matrices inversibles.
3. Énoncés du théorème de Rolle et de l'égalité des accroissements finis avec interprétation graphique. Démonstration de l'égalité des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.
4. Énoncé et démonstration des inégalités des accroissements finis.
5. Définition de fonction de classe C^1, énoncé et démonstration du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1.

Thèmes de la colle

MATRICES :

— Définition, somme, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, produit.

— Matrices particulières : Matrices triangulaires supérieures, inférieures et diagonales, transposition, matrices symétriques et antisymétriques, matrices élémentaires, matrices d'opérations élémentaires.

— Matrices carrées et matrices inversibles : Propriétés du produit, puissances de matrices et binôme de Newton, matrices inversibles et calcul pratique de l'inverse d'une matrice, différentes caractérisations de l'inversibilité.

RÉGULARITÉS DES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE :

Le programme concerne uniquement les propriétés des fonctions dérivables et de classe C^1.

— Fonctions continues : continuité, continuité à droite, continuité à gauche, prolongement par continuité d'une fonction, théorème des valeurs intermédiaires, existence d'un maximum et d'un minimum pour une fonction continue sur un segment.

— Fonctions dérivables : dérivabilité, dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite, extrêma d'une fonction dérivable, théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème de limite de la dérivée.

— Fonctions de classe C^1 : comparaison avec les fonctions continues et les fonctions dérivables, opérations usuelles, théorème de limite de la dérivée et de prolongement de classe C^1 d'une fonction.

Prévisions pour la semaine suivante

Calcul matriciel - régularités des fonctions.

Chapitre 14

Calcul matriciel

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Réaliser un produit de matrices avec les bonnes tailles et maîtriser la formule associée ;

-M2- Calculer des puissances de matrices carrées, notamment à l'aide du binôme de Newton ;

-M3- Montrer qu'une matrice est inversible, connaître sa définition ainsi que ses différentes caractérisations et calculer l'inverse d'une matrice inversible ;

-M4- Faire le lien entre opérations élémentaires et produit matriciel ;

-M5- Maîtriser la transposition de matrices.

-M6- Comprendre la structure des solutions d'une système linéaire.

Exercice 1 : [M1] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices précédentes.

Exercice 2 : [M6] Donner l'écriture matricielle de ces systèmes linéaires puis les résoudre. Dites si le système est compatible et dans ce cas, analysez une solution particulière et une solution du système homogène dans votre ensemble de solutions.

$$\text{(a)} \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=1 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases} ;$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=0 \end{cases} .$$

Exercice 3 : [M1] On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \dfrac{1}{j}$. Montrer que $A^2 = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à préciser.

Exercice 4 : [M1] On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\omega^{(k-1)(j-1)})_{1 \leq k,j \leq n}$.
Calculer alors $A\overline{A}$ où $\overline{A}$ est la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A.

Exercice 5 : [M1] Soit $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Que peut-on dire des tailles des matrices $LC?CL?$
Quelle est leur expression ?

Exercice 6 : [M2] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

(Q 1) Calculer B^2, B^3, puis B^n pour $n \geq 3$.

(Q 2) En déduire A^n pour tout entier n.

Exercice 7 : [M5] Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose : $S = AA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que S est symétrique.

Exercice 8 : [M3] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Vérifier qu'il existe $a; b \in \mathbb{R}; A^2 = aA + bI_2$.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 9 : [M3] Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 10 : [M3] $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$. Montrer que J n'est pas inversible.

Chapitre 15

Dérivabilité et régularités d'ordre supérieur

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

-M1- Étudier la dérivabilité ainsi que les régularités d'ordres supérieurs en un point ;

-M2- Utiliser le théorème de Rolle, les accroissements finis ;

-M3- Effectuer des calculs de dérivées n-ièmes de fonctions.

Exercice 1 : [M2] Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ ax + x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ À quelle condition sur a, la fonction f est-elle dérivable en 0?

Exercice 2 : [M2]Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Est-elle continue en 0 ? dérivable en 0?

Exercice 3 : [M2] On pose : $f(x) = (x-1)\text{Arcsin}(\sqrt{x})$ définie sur $[0;\ 1]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;\ 1[$.
2. Montrer f' admet une limite finie en 1 que l'on précisera. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 : [M2] Pour un entier naturel $n \geq 2$, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois zéros réels. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 5 : [M2] (application à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n), u_0 \in \mathbb{R}$.) Soit $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, u_0 \geq -2$ .On admet que la suite est bien définie et que : $\forall n \geq 1; u_n \geq 0$.

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \geq 0; |f(x) - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 2|.$$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$ puis que :
$\forall n \geq 1; |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1}|u_1 - 2|$.
3. Conclure sur le comportement asymptotique de cette suite.

Exercice 6 : [M1] Soit $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.