

PROGRAMME DE COLLES 13

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncer une des deux définitions de limite choisie par l'examinateur puis la définition unifiée.
2. Montrer que si f admet une limite finie strictement positive en $a \in \mathbb{R}$, alors f est strictement positive au voisinage de a .
3. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite en un point (proposition 4) puis montrer que $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
4. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (version 1) et présenter les idées de la démonstration (qu'on pourra développer si l'examinateur l'exige).
5. Énoncer le théorème sur les limites de fonctions monotones, ainsi que le théorème de Weierstrass.

Thèmes de la colle**LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE :**

- Limites de fonctions : définitions, limites à droite, à gauche et limites de fonctions, passage à la valeur absolue, passage d'inégalités larges à la limite, caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, théorèmes d'encadrements, limites de fonctions monotones.
- Fonctions continues : continuité, continuité à droite, continuité à gauche, opérations usuelles, prolongement par continuité d'une fonction, théorème des valeurs intermédiaires, existence d'un maximum et d'un minimum pour une fonction continue sur un segment.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.
- Étude de suites récurrentes définies par une fonction continue.

Prévisions pour la semaine suivante

Études de suites récurrentes, dérivabilité de fonctions de la variable réelle.



Chapitre 13

Limites et continuité des fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Connaître les définitions des différentes limites et les utiliser afin de démontrer des résultats théoriques.
- M2- Démontrer qu'une fonction admet une limite ou pas.
- M3- Étudier la continuité d'une fonction.
- M4- Maîtriser le TVI et ses différentes formes, le théorème de Weierstrass.
- M5- Être autonome sur l'étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1 : [-M1-] En vous aidant de la définition de la limite montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$.

Exercice 2 : [-M2-]

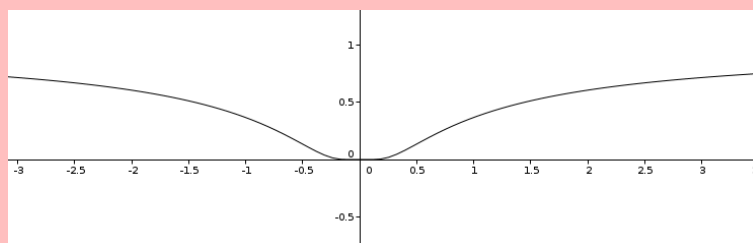
En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, étudier si la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admet une limite en 0.

Exercice 3 : [-M2-] Déterminer la limite en 0^+ de la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 : [-M2-] On veut montrer que $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

1. À l'aide du théorème de la limite monotone, justifier que $\ln$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$
2. Supposons que cette limite est finie L . En observant que $\forall x > 0, \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$, aboutir à une contradiction.

Exercice 5 : [-M2-] Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$



Cette fonction admet-elle une limite en 0?

Exercice 6 : [-M3-] La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 7 : [-M3-] Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Exercice 8 : [-M3-] Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Une fonction est k -lipschitzienne si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(Q 1) On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$. Montrer que $\sin$ est 1 lipschitzienne sur $[0; +\infty[$.

(Q 2) Montrer qu'une fonction k lipschitzienne est continue.

Exercice 9 : [-M4-]

Montrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exercice 10 : [-M4-]

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue, montrer que f possède un point fixe, c'est à dire : $\exists \alpha \in [a, b]; f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 11 : [-M2-] Déterminer la limite de $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{x}$ en $a = 0$.

Exercice 12 : [-M5-] Soit $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}$

(Q 1) On pose $g : x \mapsto e^x - x$. Étudier le signe de g .

(Q 2) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

(Q 3) Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

Exercice 13 : [-M5-] On considère la suite définie par $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

(Q 1) On pose $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. Vérifier que $[0; +\infty[$ est un intervalle stable pour f . Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n \geq 0}$?

(Q 2) Citer l'inégalité fondamentale du logarithme et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

(Q 3) Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

Exercice 14 : [-M5-]

On considère la suite définie par $u_0 \in [\sqrt{2}; +\infty[\cup]-\infty; -\sqrt{2}]$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. On pose : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

Montrer que cette suite converge vers un réel à préciser. Que se passe-t-il pour $u_0 \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[-\{0\}$?