

PROGRAMME DE COLLES 12

L'examineur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Énoncer une des neuf définitions de limite choisie par l'examineur puis la définition unifiée.
2. Montrer que si f admet une limite finie strictement positive en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est strictement positive au voisinage de a .
3. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (version 1) et présenter les idées de la démonstration (qu' on pourra développer si l'examineur l'exige).
4. Énoncer le théorème sur les limites de fonctions monotones, ainsi que le théorème de Weierstrass.
5. Définition de la transposée d'une matrice et montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.
6. Définition de matrice inversible. Énoncer et démontrer les propriétés des matrices inversibles.

Thèmes de la colle**MATRICES :**

- Définition, somme, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, produit.
- Matrices particulières : Matrices triangulaires supérieures, inférieures et diagonales, transposition, matrices symétriques et antisymétriques, matrices élémentaires, matrices d'opérations élémentaires.
- Matrices carrées et matrices inversibles : Propriétés du produit, puissances de matrices et binôme de Newton, matrices inversibles et calcul pratique de l'inverse d'une matrice, différentes caractérisations de l'inversibilité.

LIMITES DES FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE :

- Limites de fonctions : définitions, limites à droite, à gauche et limites de fonctions, passage à la valeur absolue, passage d'inégalités larges à la limite, caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction, théorèmes d'encadrements, limites de fonctions monotones.

Prévisions pour la semaine suivante

Limites et continuité des fonctions.

Chapitre 14

Calcul matriciel

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Réaliser un produit de matrices avec les bonnes tailles et maîtriser la formule associée ;
- M2- Calculer des puissances de matrices carrées, notamment à l'aide du binôme de Newton ;
- M3- Montrer qu'une matrice est inversible, connaître sa définition ainsi que ses différentes caractérisations et calculer l'inverse d'une matrice inversible ;
- M4- Faire le lien entre opérations élémentaires et produit matriciel ;
- M5- Maîtriser la transposition de matrices.
- M6- Comprendre la structure des solutions d'un système linéaire.

Exercice 1 : [M1] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices précédentes.

Exercice 2 : [M6] Donner l'écriture matricielle de ces systèmes linéaires puis les résoudre. Dites si le système est compatible et dans ce cas, analysez une solution particulière et une solution du système homogène dans votre ensemble de solutions.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} ; & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} ; \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Exercice 3 : [M1] On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \frac{1}{j}$. Montrer que $A^2 = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à préciser.

Exercice 4 : [M1] On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\omega^{(k-1)(j-1)})_{1 \leq k, j \leq n}$.

Calculer alors $A\bar{A}$ où $\bar{A}$ est la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A .

Exercice 5 : [M1] Soit $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Que peut-on dire des tailles des matrices LC ? CL ? Quelle est leur expression ?

Exercice 6 : [M2] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

(Q 1) Calculer B^2 , B^3 , puis B^n pour $n \geq 3$.

(Q 2) En déduire A^n pour tout entier n .

Exercice 7 : [M5] Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose : $S = AA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que S est symétrique.

Exercice 8 : [M3] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 .
2. Vérifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$; $A^2 = aA + bI_2$.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 9 : [M3] Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 10 : [M3] $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$. Montrer que J n'est pas inversible.

Chapitre 13

Limites et continuité des fonctions

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Connaître les définitions des différentes limites et les utiliser afin de démontrer des résultats théoriques.
- M2- Démontrer qu'une fonction admet une limite ou pas.
- M3- Étudier la continuité d'une fonction.
- M4- Maîtriser le TVI et ses différentes formes, le théorème de Weierstrass.
- M5- Être autonome sur l'étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1 : [-M1-] En vous aidant de la définition de la limite montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$.

Exercice 2 : [-M2-]

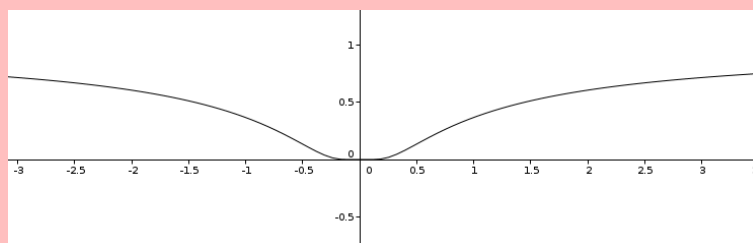
En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, étudier si la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admet une limite en 0.

Exercice 3 : [-M2-] Déterminer la limite en 0^+ de la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 4 : [-M2-] On veut montrer que $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

1. À l'aide du théorème de la limite monotone, justifier que $\ln$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$
2. Supposons que cette limite est finie L . En observant que $\forall x > 0, \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$, aboutir à une contradiction.

Exercice 5 : [-M2-] Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$



Cette fonction admet-elle une limite en 0?

Exercice 6 : [-M3-] La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?