

PROGRAMME DE COLLES 10

L'examinateur pourra choisir une question de cours et/ou un (ou une partie de) exercice parmi les exercices des fiches méthodes (cf. ci-après)

Questions de cours

1. Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par $b \neq 0$, alors : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
2. Énoncés et démonstrations des propriétés de la fonction partie entière.
3. Définition de nombres rationnels et de nombres irrationnels. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
4. Donner l'expression simple d'une suite arithmético-géométrique choisie par l'examinateur.
5. Énoncé et démonstration du (premier) théorème d'encadrement.
6. Montrer qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
7. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
8. Limites de suites complexes : définition et caractérisation par parties réelles et imaginaires.

Thèmes de la colle**NOMBRES RÉELS ET PRINCIPE DE RÉCURRENCE :**

- Sous-ensembles de nombres réels : partie majorée, minorée, bornée, maximum et minimum d'un ensemble, bornes supérieures et bornes inférieures d'un ensemble, propriété de la borne supérieure.
- Entiers naturels et raisonnement par récurrence : propriété des entiers naturels, récurrence faible à pas fixé et récurrence forte.
- Arithmétique dans $\mathbb{N}$: divisibilité, diviseurs et multiples, propriétés de la relation de divisibilité, division euclidienne, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, pgcd et ppcm de deux nombres, calcul du pgcd à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
- Nombres rationnels, décimaux et réels : nombres rationnels : définition, existence, propriétés algébriques, nombres décimaux : définition et propriétés algébriques.
- Partie entière d'un nombre réel : définition, courbe représentative, principales propriétés, approximations d'un nombre réel à la précision 10^{-n} , expression d'approximations décimales par défaut et par excès d'un nombre à la précision 10^{-n} à l'aide de la fonction partie entière.

SUITES DE NOMBRES :

- Généralités : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, monotones, majorées, minorées, bornées.
- Manipulations élémentaires de la définition de la limite d'une suite.
- Limites de suites complexes, caractérisation par parties réelles et imaginaires.

Prévisions pour la rentrée

Suites de nombres réels, calcul matriciel.

Chapitre 11

Nombres entiers, rationnels et réels

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Maîtriser la notion de borne supérieure ;
- M2- Réaliser un raisonnement par récurrence ;
- M3- Maîtriser la relation de divisibilité ainsi que la notion de nombres premiers ;
- M4- Maîtriser l'algorithme du calcul du pgcd de deux entiers ;
- M5- Maîtriser les différences entre entiers, rationnels, décimaux et réels ;
- M6- Manipuler la partie entière d'un nombre réel.

Exercice 1 : [-M1-] Pour les ensembles A et fonctions f ci-dessous, déterminer : $\sup_{x \in A} \{f(x)\}$ puis préciser la valeur du maximum lorsqu'il existe :

$$1. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{et } A = [0; 1].$$

$$2. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{et } A = \mathbb{R}.$$

Exercice 2 : [-M2-] Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3 : [-M2-] Montrer que pour tout entier naturel $n \geq \dots$, $\mathcal{P}(n)$ « $2^n \geq n + 2$ » est vraie.

Exercice 4 : [-M2-] Soit (U_n) telle que : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$. Conjecturer une expression simple de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrez par récurrence votre conjecture.

Exercice 5 : [-M2-] Soit (U_n) telle que : $U_0 = 1, U_1 = -3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n(2n+1)$.

Exercice 6 : [-M2-] On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n $a_n = n!$.

Exercice 7 : [-M3-] Soit $n = \sum_{i=0}^k a_i 10^i$, $a_i \in \{0; \dots; 9\}$, avec $k \geq 2$, sa décomposition en base 10. Alors montrer que n est divisible par 4 si et seulement si 4 divise $10a_1 + a_0$.

Exercice 8 : [-M3-] Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.

1. En cherchant les restes possibles de la division euclidienne de n par 3, montrer que $n(n-5)(n+5)$ est un multiple de 3.
2. En déduire que $6|n(n-5)(n+5)$.

Exercice 9 : [-M3-] Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants : 375; 777 000.

Exercice 10 : [-M4-] Calculer de deux façons différentes le pgcd de (420, 198).

Exercice 11 : [-M5-] On considère $x \in \mathbb{Q}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercice 12 : [-M6-] Résoudre l'équation $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.



Chapitre 12

Suites de nombres

Le point sur les méthodes :

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1- Déterminer l'expression simple de suites récurrentes linéaires d'ordres 1 ou 2 ;
- M2- Étudier la monotonie d'une suite ;
- M3- Maîtriser les définitions de limites d'une suite ;
- M4- Utiliser les théorèmes généraux pour prouver la convergence d'une suite.

Exercice 1 : [-M1-] Donner l'expression explicite de :

$$(a) \begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases} ; (b) \begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} .$$

(suite de Fibonacci).

$$(c) \begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases} .$$

Exercice 2 : [-M2-] Étudier la monotonie des suites définies par : $u_n = \frac{n}{n+1}$, $v_n = \frac{2^n}{n!}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 3 : [-M3-] En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty, (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1/n} = 1.$$

Exercice 4 : [-M4-] Étudier la nature de la suite définie par : $u_n = \frac{n(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$. Préciser sa limite en cas d'existence.

Exercice 5 : [-M4-] Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = n + \sin(n)$.

Exercice 6 : [-M4-]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

A-1. Justifier que (H_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

A-2. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que nécessairement :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 7 : [-M4-]

1. Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$ sont adjacentes.
2. Montrons que e est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. On admet que $\forall q \in \mathbb{N}, u_q < e < v_q$. En multipliant l'inégalité par $q!$, montrer que c'est impossible et conclure.