Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 9.

Durée : 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

1. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$:
   (a) $X^5 - 1$;
   (b) $(X^2 + 2X + 1 - \sqrt{2})^2 + 2$;
   (c) $8X^5 + 4X^4 - 2X^3 - 13X^2 + 10X - 2$ sachant que $\frac{1}{2}$ est racine.
2. Soient P et Q deux polynômes tels que : $\forall x \in [0;\ 1],\ P(x) = Q(x)$. Montrer que $P = Q$.
3. Soient :

$$G = \left\{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4; \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y-z+t & = & 0 \end{array} \right.\right\},\ H = \mathrm{Vect}\Big((1;1;1;1)\Big),\ F = \Big\{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4; x-y-z+t = 0\Big\}.$$

   (a) Montrer que F et H sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On admet que G est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que $G \subset F$ et $H \subset F$.
   (c) Déterminer une famille génératrice de F et de G.
   (d) Montrer que $G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
   (e) Montrer enfin que $G \oplus H = F$.

Exercice 2

Soit $P = (X+1)^n - X^n$ avec $n \geq 2$.

(Q 1) Exprimer les coefficients de P.

(Q 2) Quel est le degré de P ? le coefficient dominant de P?

(Q 3) Montrer que α est racine de P si et seulement si $\exists k \in \{1; \cdots; n-1\}$ tel que $\alpha = \frac{1}{e^{ik\pi/n} 2i \sin(k\pi/n)}$.

(Q 4) Rappeler la relation concernant le produit des racines du polynôme P afin d'obtenir

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

(Q 5) En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin(\frac{k\pi}{n}) \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 3

On note $E = D^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions 4-fois dérivables sur $\mathbb{R}$, $F = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)\}$, $G = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)\}$ et $H = \{f \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel et que G et H sont deux sous-espaces vectoriels de F.
2. Déterminer une base de G ainsi qu'une base de H.
3. Montrer que $G \cap H = \{0_E\}$.
4. Montrer que $G \oplus H = F$.
5. En déduire : $F \subset \mathrm{Vect}(\cos(x), \sin(x), \mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x))$.
6. Étudier l'inclusion réciproque puis en déduire la forme des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} - y = 0$.

Problème

On note $\mathcal{E}$ l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Dans cette question, on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne :
$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2y + \frac{3}{2} = 0.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère, donner son centre Ω et son rayon.
   (b) Soit, pour $\theta \in [0; 2\pi]$, l'ensemble $\mathcal{D}_\theta$: $\begin{cases} x = t \\ y = t + \cos(\theta) \\ z = \dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Donner un vecteur directeur et un point de cette droite $\mathcal{D}_\theta$.
   (c) Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Calculer les coordonnées de Ω_θ, le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}_\theta$. *Un dessin sera apprécié.*
   (d) Montrer que $\Omega_\theta \in \mathcal{S}$ et en déduire que $\mathcal{D}_\theta$ est incluse dans le plan tangent en Ω_θ.
   (e) Donner une équation de ce plan tangent.
2. **Une formule**. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A. Soit M un point.
   (a) Rappeler la formule donnant la norme du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}$.
   (b) En déduire que la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et passant par l'origine. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points à distance $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de cette droite :
$$\mathcal{C} = \left\{M(x; y; z) \in \mathcal{E}; d(M; \mathcal{D}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$
   (a) Montrer que $M(x; y; z) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(x - y)^2 + 2z^2 = 1$.
   (b) Quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la surface d'équation $z = 0$? On donnera une interprétation géométrique de ce résultat.
   (c) Plus généralement, quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la surface S_m d'équation $z = m$,le paramètre m appartenant à $\mathbb{R}$. On donnera une interprétation géométrique de ce résultat.
   (d) Montrer que $\forall \theta \in [0; 2\pi], \mathcal{D}_\theta \subset \mathcal{C}$.
   (e) Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $M \in \mathcal{D}_{\theta_0}$.
4. Finalement, proposer un dessin de $\mathcal{C}$ et la position relative de $\mathcal{S}$ par rapport à celle de $\mathcal{C}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Correction de l'exercice 1:

1. (a) Cf COURS : $X^5 - 1 = (X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1)$.

   (b) On commence par rechercher les racines complexes de $(X^2+2X+1-\sqrt{2})^2+2$ dans $\mathbb{C}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sqrt{2})^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sqrt{2}(1+i))(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sqrt{2}(1-i)) = 0$ car $1 = -i^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 0$. Ainsi :

   $\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sqrt{2}(1+i) = 0$ ou $\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sqrt{2}(1-i) = 0$. On cherche donc les racines des deux trinômes :

   - Racines de $x^2 + 2x + 1 - \sqrt{2}(1+i)$. On calcule $\Delta = 4\sqrt{2}(1+i) = 8e^{i\pi/4}$. On prend donc $w = 2\sqrt{2}e^{i\pi/8}$ ce qui donne $z_1 = -1 - \sqrt{2}e^{i\pi/8}$ et $z_2 = -1 + \sqrt{2}e^{i\pi/8}$ pour racines.
   - De la même façon les racines de $x^2 + 2x + 1 - \sqrt{2}(1-i)$ sont $\overline{z_1} = -1 - \sqrt{2}e^{-i\pi/8}$ et $\overline{z_2} = -1 + \sqrt{2}e^{-i\pi/8}$.

   Le polynôme est de degré 4 et admet quatre racines distinctes donc est scindé à racines simples. On en déduit :

   - Dans $\mathbb{C}[X]$: $\boxed{(X^2 + 2X)^2 + 1 = (X - z_1)(X - z_2)(X - \overline{z_1})(X - \overline{z_2})}$ car le coefficient dominant est 1.
   - Dans $\mathbb{R}[X]$: On remarque que $(X - z_1)(X - \overline{z_1}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)X + |z_1|^2$. De même pour z_2. Or : $\mathrm{Re}(z_1) = -1 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $|z_1|^2 = \left(-1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. De la même façon : $\mathrm{Re}(z_2) = 1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $|z_2|^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On en déduit :

   $$\boxed{\begin{aligned}&(X^2 + 2X + 1 - \sqrt{2})^2 + 2\\ &= \left(X^2 - 2(1+\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)X + 3 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\left((X^2 - 2(1-\sqrt{2})\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)X + 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right).\end{aligned}}$$

   (c) Puisque P, P' et P'' s'annulent en $\frac{1}{2}$ cela prouve que $\frac{1}{2}$ est racine de P de multiplicité au moins 3. On peut donc factoriser le polynôme par $(X - \frac{1}{2})^3$: $P = (X - \frac{1}{2})^3(aX^2 + bX + c)$. Par analyse des coefficients dominants : $a = 8$. De même l'identification des termes constants entraîne : $c = 16$. Enfin, en -1 nous en déduisons : $-27 = -\frac{3}{2}(8 - b + 16)$ soit $b = 8$. On en déduit :

   $$\text{Dans } \mathbb{R}[X],\ P = 8(X + \frac{1}{2})^3(X^2 + 2X + 2)$$

   car le trinôme a un discriminant strictement négatif ! En revanche ce trinôme ayant pour racines complexes : $-1 \pm i$, nous en déduisons :

   $$\text{Dans } \mathbb{C}[X],\ P = 8(X + \frac{1}{2})^3(X + 1 - i)(X + 1 + i).$$

2. On suppose par l'absurde $P \neq Q$. Alors : $R = P - Q$ n'est pas le polynôme nul donc admet un nombre fini de racines. Or tous les réels de l'intervalle $[0;\ 1]$ sont racines de R puisque : $\forall x \in [0;\ 1], P(x) = Q(x)$. Contradiction.

   Par l'absurde $P = Q$.

3. **Dans** $(\mathbb{R}^4, +, .)$.

   (a) - $F \subset \mathbb{R}^4$.
   - Le vecteur nul appartient clairement à F car $0 - 0 - 0 + 0 = 0$. Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons donc : $x_1 - y_1 - z_1 + t_1 = 0$ et $x_2 - y_2 - z_2 + t_2 = 0$. On veut montrer que $u = u_1 + \lambda u_2$ est un élément de F. Or, $u = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_2 + \lambda y_2 \\ z_1 + \lambda z_2 \\ t_1 + \lambda t_2 \end{pmatrix}$. On calcule alors :
   $x_1 + \lambda x_2 - (y_2 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) + (t_1 + \lambda t_2) = x_1 - y_1 - z_1 + t_1 + \lambda(x_2 - y_2 - z_2 + t_2)$. Or, $x_1 - y_1 - z_1 + t_1 = 0$ et $x_2 - y_2 - z_2 + t_2 = 0$. On en déduit que $x_1 + \lambda x_2 - (y_2 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) + (t_1 + \lambda t_2) = 0$, ce qui prouve que : $u \in F$, ce qu'il fallait démontrer.

Les deux points ci-dessus étant vérifiés, on en déduit que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$

- Par propriété, H étant l'ensemble des vecteurs colinéaires à $(1;1;1;1)$, est un sous espace vectoriel de F.

(b) Soient $(x;y;z;t) \in G$. Alors $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y-z+t & = & 0 \end{array}\right.$ et $(x;y;z;t)$ vérifie l'équation définissant F. Donc $G \subset F$.
Soit $\lambda(1;1;1;1) \in H$. Alors $\lambda - \overline{\lambda - \lambda +} \lambda = 0$ et $\lambda(1;1;1;1) \in F$. Donc $H \subset F$.

(c)
- $(x;y;z;t) \in F$ si et seulement si $(x;y;z;t) = (y+z-t;y;z;t) = y(1;1;0;0)_{\in F} + z(1;0;1;0)_{\in F} + t(-1;0;0;1)_{\in F}$ Par définition, la famille $\Big((1;1;0;0);(1;0;1;0);(-1;0;0;1)\Big)$ est une famille génératrice de F.
- De même,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y-z+t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+t & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $(x;y;z;t) \in G$ si et seulement si

$$(x;y;z;t) = t(-1;0;0;1)_{\in G} + y(0;1;-1;0)_{\in G}$$

Par définition, la famille $\Big((-1;;0;0;1);(0;1;-1;0)\Big)$ est une famille génératrice de G.

(d)

$$(x;y;z;t) \in H \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (x;y;z;t) & = & \lambda(1;1;1;1) \\ x+y+z+t & = & 0 \\ x-y-z+t & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{et } (x;y;z;t) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Ainsi, $\boxed{G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

(e) Soit $(x;y;z;t) \in F$. On cherche $\lambda;\mu;\gamma \in R$ tels que

$$(x;y;z;t) = \lambda(1;1;1;1) + \mu(-1;0;0;1) + \gamma(0;1;-1;0).$$

On obtient ce ssytème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda-\mu & = & x \\ \lambda+\gamma & = & y \\ \lambda-\gamma & = & z \\ \lambda+\mu & = & t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{x+t}{2} \\ \mu & = & \frac{t-x}{2} \\ \gamma & = & \frac{y+z}{2} \\ \frac{x+t}{2} & = & \frac{z+y}{2} \end{array}\right.$$

Or $\frac{z+y}{2} = \frac{x+t}{2}$ car $(x;y;z;t) \in F$. Finalement, le système est compatible et tout élément de F s'écrit comme la somme d'un élément de H et d'un élément de G, ce qui montre que $F \subset G + H$. De plus l'inclusion réciproque est évidente. En effet, G et H sont des sous-espaces vectoriels de F donc $G + H$ est également un sous-espace vectoriel de F par propriété. En particulier : $G + H \subset F$.

Par double inclusion : $\boxed{G + H = F.}$

Correction de l'exercice 2:

(Q 1) Par la formule du binôme de Newton, $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - X^n = \Big(1 + \binom{n}{1} X + \cdots + \binom{n}{n-1} X^{n-1} + \cancel{X^n}\Big) - \cancel{X^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$.

(Q 2) Le polynôme P est de degré $n-1$, son coefficient dominant est égal à $\binom{n}{n-1} = n$.

(Q 3) α est racine de P si et seulement si $(\alpha+1)^n = \alpha^n$ si et seulement si $\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^n = 1$ car $\alpha \neq 0$ (sinon on aurait $1 = 0$.) Ainsi, α est racine de P si et seulement si $\exists k \in \{0;\cdots;n-1\}$ tel que $\frac{\alpha+1}{\alpha} = e^{i2k\pi/n}$ ce qui équivaut à $\exists k \in \{0;\cdots;n-1\}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \alpha+1 & = & \alpha e^{i2k\pi/n} \\ \Leftrightarrow \alpha(1-e^{i2k\pi/n}) & = & -1 \end{array}$$

Or $(1 - e^{i2k\pi/n}) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Ainsi, α est racine de P si et seulement si $\exists k \in \{1;\cdots;n-1\}$ tel que

$$\alpha = \frac{1}{e^{i2k\pi/n} - 1} = \frac{1}{e^{ik\pi/n}[e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}]} = \boxed{\frac{1}{e^{ik\pi/n}[2i\sin(k\pi/n)]}}$$

(Q 4) On sait que le produit des racines d'un polynôme de degré n est égal à $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$. En effet,

$$P = a_n X^n + \dots + a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} \Big(X - \alpha_k \Big)$$

On substitue à l'indéterminée X le nombre 0 pour obtenir :

$$a_0 = a_n \prod_{k=1}^{n} (-\alpha_k) \Leftrightarrow a_0 = a_n \times (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{a_0}{a_n(-1)^n} = \frac{a_0(-1)^n}{a_0(-1)^n \times (-1)^n} = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}}$$

Ici notre polynôme est de degré $n-1$, son coefficient dominant est égal à n, son coefficient constant est égal à 1. On en déduit que :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)} \Big) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$$

(Q 5) En utilisant les propriétés du produit,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)} \Big) &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{e^{ik\pi/n}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} \\ &= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} \end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\sum_{k=1}^{n-1} ik\pi/n}$$

Puis $\sum_{k=1}^{n-1} ik\pi/n =_{\text{par linéarité}} \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{i\pi}{n} \times \frac{[n-1]\times[1+n-1]}{2} = \frac{i\pi(n-1)}{2}$ et $\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{i\pi(n-1)/2} = i^{n-1}$. Enfin,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{2ie^{ik\pi/n} \sin(k\pi/n)} \Big) = \frac{1}{(2i)^{n-1} \times i^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} = \frac{1}{(-2)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}$$

En reprenant l'expression, on a :

$$\frac{1}{(-2)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \Big(\sin(\frac{k\pi}{n}) \Big) = \frac{n}{(-2)^{n-1} \times (-1)^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 3:

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.
   - Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)$, ce qui prouve que ${}_E \in F$.
   - Soient : λ, μ deux réels et f_1, f_2 deux éléments de F c'est à dire deux fonctions 4-fois dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(4)}(x) = f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(4)}(x) = f_2(x)$. Posons : $h = \lambda f_1 + \mu f_2$. Alors, par combinaisons linéaires, h est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(4)}(x) = \lambda f_1^{(4)}(x) + \mu f_2^{(4)}(x)$. Or par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(4)}(x) = f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(4)}(x) = f_2(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(4)}(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = h(x)$ ce qui prouve que $h \in F$.

   On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de E.

   Montrons que G est un sous-espace vectoriel de F.
   - Déjà, $G \subset F$. En effet, si $f \in G$. Alors f est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$. En dérivant deux fois cette égalité, nous en déduisons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f''(x)$. Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)$ ce qui prouve que $f \in F$.

- Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{''}(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{''}(x) = f(x)$, ce qui prouve que ${}_E \in G$.
- Soient : λ, μ deux réels et f_1, f_2 deux éléments de G c'est à dire deux fonctions 4-fois dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{''}(x) = f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{''}(x) = f_2(x)$. Posons : $h = \lambda f_1 + \mu f_2$. Alors, par combinaisons linéaires, h est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{''}(x) = \lambda f_1^{''}(x) + \mu f_2^{''}(x)$. Or par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{''}(x) = f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{''}(x) = f_2(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{''}(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = h(x)$ ce qui prouve que $h \in G$.

On en déduit que <u>G est un sous-espace vectoriel de F.</u>

Montrons que H est un sous-espace vectoriel de F.

- Déjà, $H \subset F$. En effet, si $f \in H$. Alors f est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$. En dérivant deux fois cette égalité, nous en déduisons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = -f''(x)$. Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)$ ce qui prouve que $f \in F$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{''}(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{''}(x) = -f(x)$, ce qui prouve que ${}_E \in H$.
- Soient : λ, μ deux réels et f_1, f_2 deux éléments de H c'est à dire deux fonctions 4-fois dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{''}(x) = -f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{''}(x) = -f_2(x)$. Posons : $h = \lambda f_1 + \mu f_2$. Alors, par combinaisons linéaires, h est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{''}(x) = \lambda f_1^{''}(x) + \mu f_2^{''}(x)$. Or par hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{''}(x) = -f_1(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{''}(x) = -f_2(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ h^{''}(x) = -\lambda f_1(x) - \mu f_2(x) = -h(x)$ ce qui prouve que $h \in H$.

On en déduit que <u>H est un sous-espace vectoriel de F.</u>

2. - Soit $f \in E$. Alors : $f \in G \Leftrightarrow f'' - f = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions de la forme : $\lambda e^x + \mu e^x$. Ainsi :
$$\begin{aligned} f \in G &\Leftrightarrow \exists(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^x + \mu e^x \\ &\Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(e^x;\ e^{-x}). \end{aligned}$$
Par conséquent : $G = \mathrm{Vect}(e^x;\ e^{-x})$. La famille $\mathcal{F} = (e^x;\ e^{-x})$ est donc une famille génératrice de G. Elle est de plus libre car $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^x + \mu e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^{-2x} = 0$, alors pour $x = 0$, nous avons $\lambda + \mu = 0$, et en passant à la limite en $+\infty$, nous en déduisons : $\lambda = 0$. D'où : $\lambda = \mu = 0$.

   Au final <u>$\mathcal{F} = (e^x;\ e^{-x})$</u> est <u>libre et génératrice de G donc est une base de G.</u>
   - Soit $f \in E$. Alors : $f \in H \Leftrightarrow f'' + f = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions de la forme : $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. Ainsi :
$$\begin{aligned} f \in H &\Leftrightarrow \exists(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \\ &\Leftrightarrow f \in \mathrm{Vect}(\cos(x);\ \sin(x)). \end{aligned}$$
Par conséquent : $H = \mathrm{Vect}(\cos(x);\ \sin(x))$. La famille $\mathcal{G} = (\cos(x);\ \sin(x))$ est donc une famille génératrice de G. Elle est de plus libre car si $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$, alors pour $x = 0$, nous avons $\lambda = 0$, et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, nous obtenons : nous en déduisons : $\mu = 0$. D'où : $\lambda = \mu = 0$.

   Au final <u>$\mathcal{G} = (\cos(x);\ \sin(x))$</u> est <u>libre et génératrice de H donc est une base de H.</u>
3. - $\{0_E\} \subset G \cap H$ est évidente car $G \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Montrons : $G \cap H \subset \{0_E\}$. Soit $f \in G \cap H$. Alors : $f \in G$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$. De plus, $f \in H$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$. Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

   Par double inclusion, $\boxed{G \cap H = \{0_E\}.}$
4. - $G + H \subset F$ est évident car G et H sont des sous-espaces vectoriels de F.
   - Montrons que $F \subset G + H$. Soit donc $f \in F$, c'est à dire une fonction 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)$. On cherche $f_1 \in G$ et $f_2 \in H$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. En dérivant deux fois cette expression, on obtient : $f''(x) = f_1''(x) + f_2''(x)$. Or : $f_1 \in G$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1''(x) = f_1(x)$ et $f_2 \in H$ donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2''(x) = -f_2(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) - f_2(x) = f''(x)$. Comme : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) + f_2(x) = f(x)$. En sommant, il vient :
$f_1(x) = \dfrac{f(x) + f''(x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f''(x)}{2}$.

Posons donc : $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f''(x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f''(x)}{2}$. Alors :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x)+f_2(x) = f(x)$ en sommant les deux égalités ci-dessus.
- f_1 est deux fois dérivable par somme de fonctions deux-fois dérivable (en effet f est 4-fois dérivable donc f'' est deux fois dérivables et f est également deux fois dérivable) et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1''(x) = \dfrac{f''(x)+f^{(4)}(x)}{2}$. Or $f \in F$ donc : $f^{(4)} = f$ et par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1''(x) = \dfrac{f''(x)+f(x)}{2} = f_1(x)$. De plus f_1 est dérivable et $f_1'' = f_1$ donc f_1'' est deux fois dérivable ce qui entraîne que f_1 est 4-fois dérivable. Bref, f_1 est 4-fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1''(x) = f_1(x)$, ce qui prouve que $f_1 \in G$.
- f_2 est deux fois dérivable par somme de fonctions deux-fois dérivable (en effet f est 4-fois dérivable donc f'' est deux fois dérivables et f est également deux fois dérivable) et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2''(x) = \dfrac{f''(x)-f^{(4)}(x)}{2}$. Or $f \in F$ donc : $f^{(4)} = f$ et par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2''(x) = \dfrac{f''(x)-f(x)}{2} = f_2(x)$. De plus f_2 est dérivable et $f_2'' = -f_2$ donc f_2'' est deux fois dérivable ce qui entraîne que f_2 est 4-fois dérivable. Bref, f_2 est 4-fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2''(x) = -f_2(x)$, ce qui prouve que $f_2 \in H$.

Par conséquent : $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in G$ et $f_2 \in H$ donc : $f \in G+H$.

Par double inclusion, $\boxed{G+H = F.}$

5. Comme $G = \text{Vect}(e^x, e^{-x})$ et $H = \text{Vect}(\cos(x);\ \sin(x))$ on en déduit : $G+H = \text{Vect}(e^x, e^{-x}, \cos(x);\ \sin(x))$. Par conséquent :
$F = \text{Vect}(e^x, e^{-x}, \cos(x);\ \sin(x))$. Or $e^x = \text{ch}(x)+\text{sh}(x)$ et $e^{-x} = \text{ch}(x)-\text{sh}(x)$ donc $\text{Vect}(e^x, e^{-x}, \cos(x);\ \sin(x)) \subset \text{Vect}(\cos(x), \sin(x), \text{ch}(x), \text{sh}(x))$. Ainsi, $\boxed{F \subset \text{Vect}(\cos(x), \sin(x), \text{ch}(x), \text{sh}(x)).}$
6. Réciproquement : Soit $f_1(x) = e^{-x}$. On sait que f_1 est 4-fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(4)}(x) = f_1(x)$. Donc $f_1 \in F$. De la même façon, on prouve que : $\exp$, $\cos$ et $\sin$ donc des éléments de F. F étant un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que :
$\text{Vect}(\cos(x), \sin(x), \text{ch}(x), \text{sh}(x)) \subset F$. Au final,
$F = \text{Vect}(\cos(x), \sin(x), \text{ch}(x), \text{sh}(x))$ ce qui justifie que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f^{(4)} = f$ est exactement l'ensemble des fonctions de la forme $a\cos(x)+b\sin(x)+b\text{ch}(x)+c\text{sh}(x)$ avec $(a,b,b,c) \in \mathbb{R}^4$.

Correction du problème :

1. (a) $x^2-2x+y^2+z^2-2y+\dfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = \dfrac{1}{2}$. On reconnaît donc une sphère $\boxed{\text{de centre } \Omega = (1;\ 1;\ 0) \text{ et de rayon : } \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

   (b) $\boxed{A\left(0;\ \cos(\theta);\ \dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right)}$ est un point de cette droite.

   Un vecteur directeur est $\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$.

   (c) Notons : $\Omega_\theta = (x;\ y;\ z)$. Nous avons : $\Omega_\theta \in D_\theta$ donc : $x = t$, $y = t+\cos(\theta)$ et $z = \dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$.

   De plus, $\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ donc :

   $\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow t-1+t+\cos(\theta)-1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{\cos(\theta)}{2}+1$. On en déduit :

   $\boxed{\Omega_\theta = \left(-\dfrac{\cos(\theta)}{2}+1;\ \dfrac{\cos(\theta)}{2}+1;\ \dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right).}$

   (d)

$$\begin{aligned}
& x^2-2x+y^2-2y+z^2-\frac{3}{2}\\
= & \frac{\cos^2(\theta)}{4}+\cos(\theta)+1+\cos(\theta)-2+\frac{\cos^2(\theta)}{4}-\cos(\theta)+1-\cos(\theta)-2+\frac{\sin(\theta)^2}{2}+\frac{3}{2}\\
= & \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{2}-\frac{1}{2}\\
= & 0 \quad \text{car } \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\underline{\Omega_\theta \in \mathcal{S}}$.

Par conséquent D_θ est perpendiculaire à $(\Omega\Omega_\theta)$ en Ω_θ. Puisque le plan tangent en Ω_θ est orthogonal à $(\Omega\Omega_\theta)$, on en déduit que <u>$\mathcal{D}_\theta$ est incluse dans le plan tangent en Ω_θ.</u>

(e) Si l'on note P le plan tangent en Ω_θ, alors :

$$\begin{aligned}
M(x;\ y;\ z)\in P & \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega_\theta M}.\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}=0\\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1+\dfrac{\cos(\theta)}{2}\\ y-1-\dfrac{\cos(\theta)}{2}\\ z-\dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos(\theta)}{2}\\ \dfrac{\cos(\theta)}{2}\\ \dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=0\\
& \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\cos(\theta)}{2}x+\frac{\cos(\theta)}{2}y+\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}z-\frac{1}{2}=0},
\end{aligned}$$

toujours à l'aide de la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$.

2. **Une formule**.

(a) $\boxed{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}||=||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{AM}|||\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})|.}$

(b) Notons H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\| & = \|\overrightarrow{u}\|||\overrightarrow{AM}|||\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})|\\
& = \|\overrightarrow{u}\|AH \quad \text{car} |\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})|=\frac{MH}{AM}\\
& = \|\overrightarrow{u}\|d(M,\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

En divisant par $\|\overrightarrow{u}\|$, nous en déduisons :

$$\boxed{d(M,\mathcal{D})=\frac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.}$$

3. (a) Ici, $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $A=(0;\ 0;\ 0)$ donc $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Ainsi :

$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}z\\-z\\y-x\end{pmatrix}$, donc :

$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|^2=2z^2+(y-x)^2$ et $\|\overrightarrow{u}\|^2=2$.

De plus,

$M\in C \Leftrightarrow d(M,\mathcal{D})^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}=\dfrac{1}{2}$ d'après précédemment. On en déduit donc :

$\boxed{M\in C\Leftrightarrow (x-y)^2+2z^2=1.}$

(b) $$\begin{aligned}
\begin{cases}(x-y)^2+2z^2=1\\ z=0\end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=1\\ z=0\end{cases}\\
& \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=1\\ z=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x-y=-1\\ z=0\end{cases}.
\end{aligned}$$

<u>L'ensemble recherché est donc la réunion de deux droites d'expressions cartésiennes respectives</u> : $\begin{cases}x-y=1\\ z=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x-y=-1\\ z=0\end{cases}$.

(c) $$\begin{cases}(x-y)^2+2z^2=1\\ z=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=1-2m^2\\ z=0\end{cases}.$$

Ainsi, lorsque :

- $1-2m^2=0\Leftrightarrow \boxed{m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ l'intersection est une <u>droite.</u>
- $1-2m^2>0\Leftrightarrow \boxed{m\in\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[}$, l'intersection est <u>la réunion de deux droites.</u>

- $1-2m^2<0 \Leftrightarrow \boxed{m \in \left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right[}$, l'intersection est vide.

(d) Si $M(x;\ y;\ z) \in \mathcal{D}_\theta$, alors : $x=t$, $y=t+\cos(\theta)$ et $z=\dfrac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$. Par conséquent : $2z^2+(y-x)^2=\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=1$, ce qui prouve que $\boxed{M \in C.}$

(e) Soit $M \in \mathcal{C}$. Alors : $2z^2+(y-x)^2=1$. Posons $Y=\sqrt{2}z$ et $X=y-x$. Alors : $X^2+Y^2=1$ donc il existe $\theta_0 \in [0;\ 2\pi]$ tel que : $X=\cos(\theta_0)$ et $Y=\sin(\theta_0)$. Donc : $z=\dfrac{\sin(\theta_0)}{\sqrt{2}}$ et $y-x=\cos(\theta_0)$. En posant $x=t$, nous avons alors : $x=t, y=t+\cos(\theta_0), z=\dfrac{\sin(\theta_0)}{\sqrt{2}}$ ce qui prouve que $M \in \mathcal{D}_{\theta_0}$.

On a donc prouvé, partant de $M \in C$, que : $\exists \theta_0 \in [0;\ 2\pi]\ /\ M \in \mathcal{D}_{\theta_0} \Leftrightarrow M \in \underset{\theta\in[0;2\pi]}{\cup} \mathcal{D}_\theta$, donc que : $\boxed{\mathcal{C} \subset \underset{\theta\in[0;2\pi]}{\cup} \mathcal{D}_\theta.}$

4. L'ensemble des points de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points équidistants d'une droite. C'est donc un cylindre de révolution autour de l'axe $O+\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)$. De plus, la sphère est tangente à toutes les droites $(\mathcal{D}_\theta)_{\theta\in[0;2\pi]}$ et la réunion de ces droites constitue le cylindre. Ainsi, la sphère est tangente au cylindre.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆