Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 8.

Durée : 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Petits exercices en vrac

1. Déterminer $\lim_{t \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} \right)$.
2. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n \geq 0} \frac{e^n}{2^n}\,; \quad \text{(b)} \sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right); \text{(c)} \sum \frac{n+1}{n^2 - n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \text{(d)} \sum n^2 e^{-n}.$$

3. Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $\Phi(P) = XP'' + P' + P$.
   (Q 1) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
   (Q 2) Donner sa matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (Q 3) Montrer que $(\Phi - Id)^2(P) = 2P''$ puis que $(\Phi - Id)^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$.
   (Q 4) Montrer que Φ est un isomorphisme et déterminer Φ^{-1}.
   (Q 5) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Phi - Id)$.
4. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.
   À l'aide des sommes de Riemann (attention <u>sommes</u> de Riemann et pas <u>séries</u> de Riemann), montrer que : $S_n \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}$.

Problème 1

On note φ la fonction définie sur $[0;\ 1]$ par $\varphi(t) = \begin{cases} t\ln(t) \text{ si } t \in]0;\ 1] \\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$.

1. (a) Montrer que $\varphi \in C([0;\ 1])$.

   (b) Montrer que $\forall t \in [0;\ 1],\ |\varphi(t)| \leq \dfrac{1}{e}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt$ et pour $\alpha \in]0;\ 1[$, $J_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^{n+1} \ln(t)\, dt$.

   (a) Justifier l'existence de I_n et $J_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calculer $J_n(\alpha)$ à l'aide d'une intégration par parties et montrer que : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}$.

   (c) Montrer que : $\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt\right| \leq \dfrac{\alpha}{e}$. Qu'en déduit-on pour $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt$?

   (d) Déduire de la question précédente que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} (I_n - J_n(\alpha)) = 0$ puis la valeur de I_n.

   (e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} I_n$ converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k$, $S = \displaystyle\int_0^1 \psi(t)\, dt$ et $R_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\psi(t)\, dt$, avec $\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{1-t} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ -1 \text{ si } t = 1. \end{cases}$

   (a) Justifier l'existence de S et R_n.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = S - R_n$.

   (c) Justifier l'existence de $M = \sup_{t \in [0;\ 1]} |\psi(t)|$ puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq \dfrac{M}{n+2}$.

   (d) Finalement montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = S$.

4. On admet dans cette question : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (a) En déduire à l'aide de 2 la valeur exacte de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$.

   (b) En vous aidant des questions précédentes, montrer finalement que :

$$\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\, dt = \frac{\pi^2 - 6}{6}.$$

Problème 2

Le problème est consacré à une expression simple des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de rang 1. Dans la première partie, on étudie un exemple. Dans la deuxième partie, on obtient une expression simple des matrices carrée d'ordre 3, de rang 1, et vérifiant une équation matricielle. La troisième partie établir un résultat général sur les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de rang 1. En particulier, nous en déduisons dans la dernière partie une expression simple de tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, de rang 1, et non nilpotents.

A) Un exemple.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

A-1 Calculer $\mathrm{rg}(A)$.

A-2 Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ? Préciser ses éléments caractéristiques, ainsi qu'une base de chacun de ces derniers.

A-3 Déduire de précédemment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si l'on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, préciser la matrice de passage $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

B) Une équation matricielle.

On cherche toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 et vérifiant la relation : $M^2 = \alpha M$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à M et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

B-1 Montrer que $\mathrm{Im}(M) \subset \ker(M - \alpha I)$ et en déduire : $\dim(\ker(M)) + \dim(\ker(M - \alpha I)) \geq 3$.

B-2 Montrer que $\ker(M) \oplus \ker(M - \alpha I) = \mathbb{R}^3$.

B-3 Justifier l'existence de vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que : $\ker(M) = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, $\quad \ker(M - \alpha I) = \mathrm{vect}(e_3)$.

B-4 Justifier rapidement pourquoi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$.

B-5 En déduire le résultat suivant : si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 vérifie la relation $M^2 = \alpha M$, alors $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ quelconque.

C) Un résultat général.

On considère dorénavant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ et tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$. On note e un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(e) \neq 0$.

C-1 Justifier l'existence de e et montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{vect}(e) = \mathbb{R}^n$.

C-2 En remarquant que $f^2(e) \in \mathrm{Im}(f)$, justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $f^2(e) = \alpha f(e)$.

C-3 On considère $x \in \mathbb{R}^n$ et on décompose : $x = u + \lambda e$, avec $u \in \ker(f)$ et $v = \lambda e \in \mathrm{vect}(e)$. Montrer que $f^2(x) = \alpha f(x)$.

C-4 On note M la matrice de f dans la base canonique. Déduire de la relation précédente une relation vérifiée par M.

D) Synthèse et exemple.

D-1 En vous aidant des résultats précédents, montrer que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et $M^2 \neq O_3$, alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que : $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$.

D-2 On suppose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{rg}(M) = 1$. Préciser alors α, D et P.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note φ la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u^2)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. En déduire : $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(u))$.

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. Commmençons par mettre au même dénominateur :
$\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} = \dfrac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln(t)}$.
Or, on posant $t = 1+u$ nous obtenons :

   - au numérateur : $u - \ln(1+u) = \frac{1}{2}u^2 + o_0(u^2)$ donc : $u - \ln(1+u) \sim_0 \frac{1}{2}u^2$.
   - au dénominateur : $u\ln(1+u) \sim_0 u^2$ par produit d'équivalents usuels.

   Ainsi, par quotient d'équivalents : $\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} \sim_1 \dfrac{\frac{1}{2}(t-1)^2}{(t-1)^2} \sim_1 \frac{1}{2}$.

   On en déduit : $\boxed{\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}\right) = \dfrac{1}{2}.}$

2. (a) On reconnait une série géométrique de raison $q = \dfrac{e}{2}$ car $\dfrac{e^n}{2^n} = \left(\dfrac{e}{2}\right)^n$. Comme $q > 1$ on en déduit que la série diverge.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Puisque :

   $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et :

   $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ on en déduit :

   $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Par ailleurs :

   - $\sum \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de convergence des séries de Riemann.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n^2} > 0$;

   Donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que : $\boxed{\sum\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \text{ converge.}}$

   (c) Posons : $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-n}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par équivalents usuels : $u_n \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.
   Comme $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries de Riemann, on en déduit que la série est convergente par critère de comparaison des séries à termes positifs.

   (d) Posons : $u_n = n^2e^{-n}$. Nous avons :

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$.
   - $\exists C \in \mathbb{R}\ /\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{C}{n^2}$. En effet :

     $n^2u_n = n^4e^{-n}$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4e^{-n} = 0$ par croissances comparées. Ainsi $(n^2u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc est majorée car toute suite convergente est bornée, et donc majorée.
   - $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de convergence des séries de Riemann.

   Par le critère de majoration des séries à termes positifs on en déduit que : $\boxed{\sum_{n\geq 1} n^2e^{-n}}$ converge.

3. (Q 1) Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X]$. On calcule

   $$\Phi(\lambda P+\mu Q) = X(\lambda P+\mu Q)'' + (\lambda P+\mu Q)' + \lambda P+\mu Q = \lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q).$$

   Par définition, Φ est donc linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. On en déduit : $\Phi(P) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

   (Q 2) Puisque : $\Phi(1) = 1$, $\Phi(X) = X+1$ et $\Phi(X^2) = X^2+4X$ la matrice demandée est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Q 3) $$\begin{aligned}(\Phi - Id)^2(P) &= (\Phi - Id)(\Phi(P) - P)\\ &= (\Phi - Id)(XP'' + P')\\ &= \Phi(XP'' + P') - (XP'' + P')\\ &= x(XP'' + P')'' + (XP'' + P')'.\end{aligned}$$

Or : $(XP'' + P')' = XP^{(3)} + 2P'' = 2P''$ car $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc $(XP'' + P')'' = 0$ de la même façon. On en déduit : $(\Phi - Id)^2(P) = 2P''$.

Ainsi, $(\Phi - Id)^3(P) = (\Phi - Id)(2P'') = 0$ toujours car $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $(\Phi - Id)^3 = 0$.

(Q 4) On sait que $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, X+1, 4X+X^2)$. De plus $(1, X+1, 4X+X^2)$ est libre car de degrés échelonnés donc $\mathrm{rg}(\Phi) = 3$. Enfin $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc : $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ ce qui prouve que Φ est surjective. Φ étant un endomorphisme, elle est également injective donc est bijective et linéaire donc est un isomorphisme.

Si l'on note $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Par propriété la matrice de Φ^{-1} dans la base canonique est A^-1. Or, par calcul matriciel, $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\Phi^{-1}(a + bX + cX^2) = (a - b + 4c) + (b - 4c)X + cX^2$.

(Q 5) $P \in \mathrm{Ker}(\Phi - Id) \Leftrightarrow \Phi(P) - P = 0 \Leftrightarrow XP'' + P' = 0$. En notant $P = ax^2 + bX + c$, la condition s'écrit : $4aX + b = 0 \Leftrightarrow 4a = O$ et $c = 0$. On en déduit : $P \in \mathrm{Ker}(\Phi - Id) \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P = c \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(\Phi - Id) = \mathrm{Vect}(1)$. Toute famille constituée dun seul vecteur est libre donc (1) est libre est génératrice (car $\mathrm{Ker}(\Phi - Id) = \mathrm{Vect}(1)$) donc est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi - Id)$.

4. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

On remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n\sqrt{n}} &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}\\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),\end{aligned}$$

avec f définie sur $[0;\ 1]$ par l'expression : $f(t) = \sqrt{t}$. Comme f est continue sur $[0;\ 1]$ le théorème de convergence des sommes de riemann assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sqrt{t}\, dt.$$

Or : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$. Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$ ce qui prouve que $\boxed{S_n \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}.}$

Problème 1 :

On note φ la fonction définie sur $[0;\ 1]$ par $\varphi(t) = \begin{cases} t\ln(t) \text{ si } t \in]0;\ 1] \\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$.

1. (a) Par opérations usuelles sur les fonctions continues, φ est continue sur $]0;\ 1]$.

   De plus, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$. Comme $\varphi(0) = 0$ par définitions, cela veut dire que : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \varphi(0)$ donc que φ est continue en 0.

   Au final, $\varphi \in C([0;\ 1])$.

   (b) φ est dérivable sur $]0;\ 1]$ par produit de focntions dérivables et $\forall t \in]0;\ 1]$, $\varphi'(t) = \ln(t) + 1$. Comme : $\ln(t) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geq -1 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{1}{e}$ on en déduit le tableau de variations :

t	0		$\frac{1}{e}$		1
φ	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

Par conséquent : $\forall t \in [0;\ 1]\ -\dfrac{1}{e} \leq \varphi(t) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in [0;\ 1],\ |\varphi(t)| \leq \dfrac{1}{e}.}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt$ et pour $\alpha \in]0;\ 1[$, $J_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^{n+1} \ln(t)\, dt$.

   (a) • $t \mapsto t^n \varphi(t)$ est continue sur $[0;\ 1]$ par produit de fonctions continues et d'après la question 1. Par conséquent : $\displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt$ existe ce qui prouve que I_n existe.

   • De la même façon $t \mapsto t^{n+1} \ln(t)$ est continue sur $[\alpha;\ 1]$ donc J_n existe.

   (b) $J_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^{n+1} \ln(t)\, dt$. Posons : $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$. u et v sont de classe C^1 sur $I = [\alpha;\ 1]$ et : $\forall t \in I,\ u'(t) = \dfrac{1}{t}, v'(t) = t^{n+1}$. L'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} J_n(\alpha) &= \int_\alpha^1 t^{n+1} \ln(t)\, dt \\ &= \left[\frac{\ln(t) t^{n+2}}{n+2}\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{t^{n+1}}{n+2}\, dt \\ &= \boxed{-\frac{\ln(\alpha)\alpha^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2}(\alpha^{n+2} - 1).} \end{aligned}$$

   Comme $n + 2 > 0$, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha^{n+2} = 0$ et par croissances comparées $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \ln(\alpha)\alpha^{n+2} = 0$, donc par opérations usuelles : $\boxed{\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}.}$

   (c) Par l'inégalité triangulaire :
   $\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt\right| \leq \dfrac{\alpha}{e} \leq \displaystyle\int_0^\alpha |t^n \varphi(t)|\, dt.$

   Or, $0 \leq t\alpha \leq 1$ et $\forall t \in [0;\ 1], |t^n| \leq 1$ et $|\varphi(t)| \leq \dfrac{1}{e}$ d'après précédemment. Par conséquent :

   $\forall t \in [0;\ \alpha], |t^n \varphi(t)| \dfrac{1}{e}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

   $\displaystyle\int_0^\alpha |t^n \varphi(t)|\, dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{e}\, dt$. Puisque : $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{e}\, dt = \frac{\alpha}{e}$ il s'ensuit :

   $\boxed{\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt\right| \leq \dfrac{\alpha}{e}.}$

   Ainsi :

$$\forall \alpha \in]0;\ 1[,\ O \leq \left|\int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt\right| \leq \frac{\alpha}{e}.$$

   Or : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha}{e} = 0$ donc par théorème d'encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt = 0.}$

   (d) On remarque que $J_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 t^n \varphi(t)\, dt$ donc par Chasles :

   $I_n - J_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt - \int_\alpha^1 t^n \varphi(t)\, dt = \int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt.$

   Or, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^\alpha t^n \varphi(t)\, dt = 0$ donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} (I_n - J_n(\alpha)) = 0.}$

   Enfin, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} I_n = I_n$ et d'après ci-dessus : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} J_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+2)^2}$, donc puisque : $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} (I_n - J_n(\alpha)) = 0$ on en déduit au final :

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{(n+2)^2}.}$$

(e) • $-I_n = \dfrac{1}{(n+2)^2}$;

• $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+2)^2} \geq 0$;

• $\dfrac{1}{(n+2)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$;

• $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de convergence des séries de Riemann.

Par comparaison des séries à termes positifs on en déduit que : $\sum -I_n$ converge. Or : $\sum I_n = -\sum -I_n$ donc : $\underline{\sum I_n \text{ converge.}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k$, $S = \displaystyle\int_0^1 \psi(t)\,dt$ et $R_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\psi(t)\,dt$, avec

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)}{1-t} \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ -1 \text{ si } t = 1. \end{cases}$$

(a) • Comme φ est continue sur $[0;\ 1]$ d'après 1a, par opérations usuelles, $\underline{\psi \text{ est continue sur } [0;\ 1[}$. De plus : $\ln(t) \sim_1 t-1$ donc $\psi(t) \sim 1-1$ ce qui assure que : $\lim\limits_{t\to -1} \psi(t) = -1$. Or $\psi(-1) = -1$ par définition donc : $\lim\limits_{t\to -1} \psi(t) = \psi(-1)$ ce qui prouve que $\underline{\psi \text{ est continue en } -1.}$

Au final, $\underline{\psi \text{ est continue sur } [0;\ 1]}$ d'où $\underline{\text{l'existence de } S.}$

• ψ étant continue sur $[0;\ 1]$, $t \mapsto t^{n+1}\psi(t)$ est $\underline{\text{continue sur } [0;\ 1]}$ par produit, d'où $\underline{\text{l'existence de } R_n.}$

(b)
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} I_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 t^k \phi(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (\sum_{k=1}^{n} t^k)\varphi(t)\,dt \text{ par linéarité de l'intégrale.} \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{n+1}rphi(t)}{1-t}\,dt \text{ on peut couper en deux car} \end{aligned}$$
les deux intégrales existent d'après ci-dessus)
$$= \boxed{S - R_n.}$$

(c) • Par composition de fonctions continues, $t \mapsto |\psi(t)|$ est $\underline{\text{continue sur } [0;\ 1]}$ donc $M = \sup_{t\in[0;\ 1]}|\psi(t)|$ $\underline{\text{existe d'après le théorème de Weierstrass}}$.

• D'après l'inégalité triangulaire :

$|R_n| \leq \displaystyle\int_0^1 |t^{n+1}\psi(t)|\,dt$. Or :

$\forall t \in [0;\ 1],\ |t^{n+1}\psi(t)| = t^{n+1}|\psi(t)|$. De plus, $\forall t \in [0;\ 1],\ t^{n+1} \leq 1$ et $\forall t \in [0;\ 1],\ |\psi(t)| \leq M$ donc : $\forall t \in [0;\ 1],\ |t^n\psi(t)| \leq Mt^{n+1}$. Par croissance de l'intégrale on en déduit :

$$\int_0^1 |t^{n+1}\psi(t)|\,dt \leq \int_0^1 Mt^{n+1}\,dt.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 Mt^{n+1}\,dt = M\int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{M}{n+2}$, donc au final :

$$\boxed{|R_n| \leq \frac{M}{n+2}.}$$

(d) D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |R_n| \leq \dfrac{M}{n+2}$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+2} = 0$ donc par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} |R_n| = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.}$ Comme $S_n = S - R_n$, par somme de limites, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

Or, par définition : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty}$ donc : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = S.}$

4. On admet dans cette question : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

 (a) D'après 2d, $I_n = -\frac{1}{(n+2)^2}$ donc :

 $\sum_{k=0}^{n} I_k = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2}$, Or, par glissement d'indice : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

 Donc par Chasles, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1$. Ainsi,

 $S_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Par somme de limites, on en déduit :

 $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - \frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = 1 - \frac{\pi^2}{6}.}$

 (b) La question précédente assure que : $S = 1 - \frac{\pi^2}{6}$. Or,

 $S = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t}\,dt = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{1-t}\,dt = -\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\,dt$. Ainsi,

 $-\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\,dt = 1 - \frac{\pi^2}{6}$, ce qui donne au final :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\,dt = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2-6}{6}.}$$

Problème 2 :

A) A-1 $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right)$

$= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, car $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ceci prouve que $\mathrm{Im}(A)$ est une droite vcetorielle, donc que $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = 1.}$

A-2 Le calcul matriciel donne $A^2 = A \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f^2) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f) \Leftrightarrow f^2 = f$ ($\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.) DFonc f est linéaire et $f \circ f = f$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est un projecteur.}}$ Ses éléments caractéristiques sont $\ker(f) = \ker(A)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A)$.

- D'après ci-dessus : $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$ et la famille constituée du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

- $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow AX = O_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0\\ x+2y-2z=0\\ x+2y-2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x+2y-2z=0$$
$$\Leftrightarrow x = -2y+2z$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}-2y+2z\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\ker(f) = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_3}\right).}$ Si l'on note $\mathcal{F} = (e_2, e_3)$, alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$ d'après ci-dessus. De plus, e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{F}$ est libre. On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

A-3 Puisque f est un projecteur, nous avons $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. On en déduit que $\mathcal{B} = (e_2, e_3, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On détermine $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$, en calculant :

- $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $e_2 \in \ker(f)$.
- $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $e_3 \in \ker(f)$.
- $f(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$ Par ailleurs, $\boxed{P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

B) B-1 On suppose $X \in \text{Im}(M)$ et on veut montrer que $X \in \text{Ker}(M - \alpha I)$. Puisque $X \in \text{Im}(M)$, nous avons $X = MY$, où Y est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors : $(M - \alpha I)X = (M - \alpha I)MY = (M^2 - \alpha M)Y = 0$ car $M^2 = \alpha M$ par hypothèse. Ceci prouve que : $\boxed{\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M - \alpha I)}$.

D'après ci-dessus, $\dim(\text{Ker}(M - \alpha I)) \geq \text{rg}(M)$, donc : $\dim(\text{Ker}(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) \geq \text{rg}(M) + \dim(\ker(M))$. Or, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(M) + \dim(\ker(M)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. On en déduit donc que : $\boxed{\dim(\text{Ker}(M - \alpha I)) + \dim(\ker(M)) \geq 3.}$

B-2
- Soit $X \in \text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M - \alpha I)$. Alors $MX = 0$, puisque $M \in \text{Ker}(M)$ et $MX = \alpha X$ puisque $M \in \text{Ker}(M - \alpha I)$. On en déduit : $\alpha X = O \Leftrightarrow X = 0$, car $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M - \alpha I) = \{0\}.}$
- D'après la relation de Grassmann, nous avons : $\dim(\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I)) = \dim(\text{Ker}(M)) + \dim(\text{Ker}(M - \alpha I)) - \dim(\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M - \alpha I))$. Or d'après ci-dessus, $\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M - \alpha I) = \{0\}$ donc $\dim(\text{Ker}(M) \cap \text{Ker}(M - \alpha I)) = 0$. De plus, d'après la question précédente, $\dim(\text{Ker}(M)) + \dim(\text{Ker}(M - \alpha I)) \geq 3$. On en déduit : $\dim(\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I)) \geq 3$. Enfin, $\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I)) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(\text{Ker}(M) + \ker(M - \alpha I)) \leq 3$. Par conséquent : $\dim(\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I)) = 3$, donc : $\boxed{\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I) = \mathbb{R}^3}$, puisque $\text{Ker}(M) + \text{Ker}(M - \alpha I))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de même dimension que $\mathbb{R}^3$.

Les deux points précdents prouvent que : $\boxed{\ker(M) \oplus \ker(M - \alpha I) = \mathbb{R}^3.}$

B-3 $\text{rg}(M) = 1$ par hypothèse donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(M)) = 3 - \text{rg}(M) = 2$. Par conséquent, une base du noyau est constituée de deux éléments, donc : $\boxed{\text{Ker}(M) = \text{vect}(e_1, e_2).}$
Puisque : $\ker(M) \oplus \ker(M - \alpha I) = \mathbb{R}^3$, nous avons : $\dim(\ker(M)) + \dim(\ker(M - \alpha I)) = 3$, donc : $\dim(\ker(M - \alpha I)) = 1$. $\ker(M - \alpha I)$ est donc une droite vectorielle d'où $\boxed{\ker(M - \alpha I) = \text{vect}(e_3).}$

B-4 Puisque, $\ker(M) \oplus \ker(M - \alpha I) = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus :

- $f(e_1) = Me_1 = 0$ car $e_1 \in \ker(M)$.
- $f(e_2) = Me_2 = 0$ car $e_2 \in \ker(M)$.
- $f(e_3) = Me_3 = \alpha e_3$ car $e_1 \in \ker(M - \alpha I)$.

Ains, $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.}$

B-5 D'après les formules de changement de base : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f)P$, avec $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Or, f est canoniquement associée à M donc $M =$

$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f)$ et d'après la question précédente, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{=D}$. On en déduit : $D = P^{-1}MP$, d'où en multipliant l'égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} : $\boxed{M = PDP^{-1}.}$

C) C-1 $\text{rg}(f) \neq 0$ donc f est non nulle, ce qui justifie l'existence de $\boxed{e \text{ tel que } f(e) \neq 0.}$

- D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Or, par hypothèse, $rg(f) = 1$, donc : $\dim(\ker(f)) = n-1$. De plus, $\dim(\text{vect}(e)) = 1$, donc : $\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\text{vect}(e)) = n = \dim(\mathbb{R}^n).}$
- Soit $x \in \ker(f) \cap \text{vect}(e)$. Alors : $x = \lambda e$ ($x \in \text{vect}(e)$) et $f(x) = 0$ ($x \in \ker(f)$). Ainsi, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda f(e) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, car $f(e) \neq 0$ par hypothèse. On en déduit : $x = \lambda e = 0e = 0$, ce qui prouve que : $\boxed{\ker(f) \cap \text{vect}(e).}$

D'après les deux points précédents, $\boxed{\ker(f) \oplus \text{vect}(e) = \mathbb{R}^n.}$

C-2 $f^2(e) = f(f(e)) = f(y)$, avec $y = f(e)$, donc : $f^2(e) \in \text{Im}(f)$. Puisque $\text{rg}(f) = 1$, $\text{Im}(f)$ est de dimension 1, donc deux éléments quelconques de $\text{Im}(f)$ sont colinéaires. Or f^e et $f(e)$ sont deux éléments de l'image. Ils sont donc colinéaires, ce qui justifie l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $\boxed{f^2(e) = \alpha f(e).}$

C-3 Puisque f est linéaire, $f(x) = f(u) + \lambda f(e) = \lambda f(e)$ car $u \in \ker(f)$. Donc :

- $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda f(e)) = \lambda f^2(e) = \lambda\alpha f(e)$, d'après précédemment.
- $\alpha f(x) = \alpha\lambda f(e)$.

Finalement, $\boxed{f^2(x) = \alpha f(x).}$

C-4 On note : $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors : $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f^2) = M^2$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\alpha f) = \alpha M$. Or $f^2 = \alpha f \Leftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f^2) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\alpha f)$. Par conséquent, $\boxed{M^2 = \alpha M.}$

D) D-1 Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $\text{rg}(M) = 1$, alors son endomorphisme canoniquement associé f est de rang 1, donc d'après **C)**, $M^2 = \alpha M$, avec de plus $\alpha \neq 0$ car $M^2 \neq O_3$ par hypothèse. Alors, d'après **B)**, nous avons :

$\boxed{M = PDP^{-1}}$, avec $\boxed{P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.}$

D-2
- Nous avons $\text{rg}(M) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Or, $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc $\dim(F) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{rg}(M) = 1.}$
- Par calcul matriciel, $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$, donc $\boxed{\alpha = 3.}$
- On en déduit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Pour obtenir, P, nous devons déterminer une base de $\ker(M)$ et de $\ker(M - 3I)$. Or :

  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(M) \Leftrightarrow MX = O_3 \Leftrightarrow x + y + z = 0$. Ainsi,

  $X \in \ker(M) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

  $\text{Ker}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(M-3I) \Leftrightarrow MX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -3y+3z=0 \quad L_2 \leftarrow 2L_1+L_2 \\ 3y-3z=0 \quad L_3 \leftarrow 2L_1+L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y-z=z \\ y=z \end{cases}$. Ainsi,

$X \in \ker(M-3I) \Leftrightarrow X = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(M-3I) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Nous en déduisons : $\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$

Exercice 2:

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors : $\varphi(x) = 0_E$. Or, $\varphi(x) = u(x)$ donc $u(x) = 0_E$ ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, alors $y = \varphi(x) = u(x)$ avec $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$. Alors : $u(x) = u^2(x) = 0_E$ car $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$. On en déduit donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
   Les deux points précédents montrent donc que : $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. Le théorème du rang pour φ donne : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(Ker(u^2)$. Or : $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc : $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$. De même $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) \subset \dim(\mathrm{Ker}(u))$. On en déduit au final :
   $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(u)).}$

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆