Devoir surveillé n° 7.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = (X^2 + X + 1)^2 + 1; \quad P_2 = X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 10X + 3; \quad P_3 = X^6 + X^3 + 1.$$

   On pourra remarquer que P_2 a 1 pour racine évidente

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_2\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $\dim(F)$.
   (b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \ / \ f'(0) = f'(1)\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $F \oplus \text{Vect}(\text{Arctan}(x)) = E$.
4. Calculez les développements limités suivants aux ordres proposés :
   (a) développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\text{Arctan}(x)(\sin(x) - x)$.
   (b) développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(\ln(1 + x))$.
   (c) développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\exp\left(\dfrac{x}{1 + x}\right)$.
   (d) développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{2 + e^{-x}}$.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et tel que : $(X - 1)P' = nP$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. En appliquant la formule de Leibniz, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ (X - 1)P^{(k+1)} = (n - k)P^{(k)}$.
3. On note a_n le coefficient devant le terme de degré n de P. Donner l'expression de $P^{(n)}(1)$ en fonction de n et a_n.
4. Déduire des deux questions précédentes que 1 est racine de P de multiplicité n.
5. Finalement, quelle expression obtient-on pour P ?

Exercice 3

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que : $(X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1))$ est un base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de 1 dans cette base.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$, soit l'ensemble des polynômes s'annulant en a.
   (a) Montrer que pour tout réel a, F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 2.
   (b) Déterminer une base de $F_1 \cap F_{-1}$.
   (c) Montrer que $F_0 = \mathrm{Vect}(X(X-1), X(X+1))$.
   (d) Montrer que $F_0 \oplus H = \mathbb{R}_2[X]$ avec $H = F_1 \cap F_{-1}$.

Exercice 4

1. Soit $E = \mathbb{R}^4$, et F l'ensemble des vecteurs $(x; y; z; t)$ tels que $x + y + z + t = 0$, et G l'ensemble des vecteurs $(x; y; z; t)$ tels que $x + 2y + 3z + 4t = 0$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et calculer $\dim(F)$. De même on admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ avec $\dim(F) = \dim(G)$.
   (b) Calculer $\dim(F \cap G)$.
   (c) On considère les sous-espaces vectoriels suivants : $H_1 = F \cap G$, $H_2 = \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ et $H_3 = \mathrm{Vect}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

      Vérifier que $\dim(H_2) = \dim(H_1)$ et que H_3 est un supplémentaire commun à H_1 et H_2.
2. On note dorénavant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G.
   (b) Montrer que $F' \cap G' = \{0_E\}$.
   (c) Montrer que $\dim(F') = \dim(G')$.
   (d) On note $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de F', $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de G' et $H' = \mathrm{Vect}(u_1 + v_1, \ldots, u_r + v_r)$.

      Montrer que $\mathcal{F} = (u_1 + v_1, \ldots, u_r + v_r)$ est une base de H'.
   (e) Montrer que $F \oplus H' = F + G$ et $G \oplus H' = F + G$.
   (f) En vous aidant de H' proposez alors comment construire un supplémentaire commun à F et G.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. • P_1, cf TD.
   • On constate que que $P_2(1) = 0$. On détermine alors sa multiplicité : $P_2' = 4X^3 - 18X^2 + 24X - 10$ donc $P_2'(1) = 0$. Ensuite : $P_2'' = 12X^2 - 36X + 24$ donc $P_2''(1) = 0$. On remarque que $P_2^{(3)}(1) \neq 0$ ce qui prouve que 1 est racine de P_2 de multiplicité 3.

   Ainsi : $P_2 = (X-1)^3(aX+b)$. L'identification des termes de plus haut degré entraîne $a = 1$ et l'identification des termes de plus bas degré entraîne $3 = -b$. Au final : $\boxed{P_2 = (X-1)^3(X+3).}$

   • On cherche les racines de P_3. On résout donc l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$. En posant : $Z = z^3$, nous nous ramenons au trinôme : $Z^2 + Z + 1 = 0$ qui a pour racines : $e^{i2\pi/3}$ et $e^{-i2\pi/3}$. Par ailleurs :

   $z^3 = e^{i2\pi/3} \Leftrightarrow z = e^{i2\pi/9 + 2k\pi/3}$ ce qui donne trois solutions : $z_1 = e^{i2\pi/9}$, $z_2 = e^{i8\pi/9}$ et $z_3 = e^{i14\pi/9}$.

   De la même façon, la résolution de $z^3 = e^{-i2\pi/3}$ mène aux solutions : $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ puis $\overline{z_3}$. On en déduit :
   $\boxed{P_3 = (X - z_1)(X - \overline{z_1})(X - z_3)(X - \overline{z_2})(X - z_3)(X - \overline{z_3})}$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis :
   $$\boxed{P_3 = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + 1\right)}$$
   dans $\mathbb{R}[X]$.

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_2\}$.

   (a) • $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   • $0_2 \in F$ car $A0_2 = 0_2$.
   • Soient $(M_1, M_2) \in F^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $A(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda AM_2 + \mu AM_2$ par propriétés du produit matriciel. Or $M_1 \in F$ donc $AM_1 = 0_2$. De même $M_2 \in F$ donc $AM_2 = 0_2$. Par conséquent $A(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda 0_2 + \mu 0_2 = 0_2$ ce qui prouve que $\lambda M_1 + \mu M_2 \in F$.

   Les trois points précédents, nous en déduisons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   D'autre part, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors si $M \in F$, nous avons $AM_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases}$. Donc : $a = -2c$ et $b = -2d$ ce qui entraîne : $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Or l'inclusion réciproque est aussi vérifiée car $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$ et puisque F est un sous-espace vectoriel.

   Au final : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Cette dernière est également libre car $a\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix} = 0_2 \Leftrightarrow a = b = 0$. C'est donc une base de F constituée de deux éléments ce qui assure que : $\boxed{\dim(F) = 2.}$

   (b) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre d'après précédemment. On peut donc la compléter avec des éléments de la famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de façon à former une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (théorème de la base incomplète). Pour ceci :

- $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ car $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$ entraîne $a=1$ et $a=0$ ce qui est impossible. On peut donc rajouter $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ à $\mathcal{F}$.
- $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ entraîne $-2b = 1$ et $b = 0$ ce qui est impossible. On peut donc rajouter $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ à $\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$

Nous pouvons arrêter les tests sur les éléments de $\mathcal{G}$ ici. En effet, par propriété la famille : $\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$ est libre et de plus de taille maximale car $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ donc est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Toujours par propriété, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}\right)$ et $\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \ / \ f'(0) = f'(1)\}$.

(a)
- $F \subset E$.
- $0_E \in F$ car si f est la fonction nulle, alors f' aussi donc $f'(0) = f'(1) = 0$.
- Soient $(f_1;\ f_2) \in F^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$ et posons : $g = \lambda f_1 + \mu f_2$. Par opérations usuelles, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $g' = \lambda f_1' + \mu f_2'$ donc $g'(0) = \lambda f_1'(0) + \mu f_2'(0)$. Or $f_1 \in F$ donc : $f_1'(0) = f_1'(1)$. De même $f_2 \in F$ donc $f_2'(0) = f_2'(1)$. Ainsi : $g'(0) = \lambda f_1'(1) + \mu f_2'(1)$ donc $g'(0) = g'(1)$. Ceci entraîne que $g \in F$.

Les trois points précédents étant vérifiés, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Posons : $G = \oplus\mathrm{Vect}(\mathrm{Arctan}(x))$ et montrons par double inclusion que $F \cap G = \{0_E\}$.

- $\{0_E\} \subset F \cap G$ est évident car f est un sous-espace vectoriel de E par propriété.
- Montrons $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $f \in F \cap G$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \mathrm{Arctan}(x)$ car $f \in G$. De plus $f \in F$ donc $f'(0) = f'(1)$. Or, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nous avons : $f'(0) = \lambda$ et $f'(1) = \dfrac{\lambda}{2}$. Par conséquent : $\lambda = \dfrac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \times \mathrm{Arctan}(x) = 0$ ce qui prouve que $f = 0_E$, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant par double inclusion que : $F + G = E$.

- $F + G \subset E$ est évident car $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E par propriété.
- Montrons $E \subset F + G$. Soit $h \in E$. On cherche à prouver l'existence de $f \in F$ et $g \in G$ tels que : $h = f + g$.
  - **Analyse :** Si f et g existent, alors : $f'(0) = f'(1)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda\mathrm{Arctan}(x)$. Donc si $h = f + g$, en particulier : $h'(0) = f'(0) + \lambda$ et $h'(1) = f'(1) + \dfrac{\lambda}{2}$. En faisant la différence des deux relations précédentes il vient : $\dfrac{\lambda}{2} = h'(0) - h'(1)$. Ainsi : $g(x) = 2(h'(0) - h'(1))\mathrm{Arctan}(x)$ et $f(x) = h(x) - 2(h'(0) - h'(1))\mathrm{Arctan}(x)$.
  - **Synthèse :** Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2(h'(0) - h'(1))\mathrm{Arctan}(x)$ et $f(x) = h(x) - 2(h'(0) - h'(1))\mathrm{Arctan}(x)$. Il est clair que $\boxed{g \in G}$ et $\boxed{g + h = f.}$. Par ailleurs, $f \in F$. En effet, h étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h'(x) - 2\dfrac{h'(0) - h'(1)}{1+x^2}$ donc : $f'(0) = h'(0) - 2(h'(0) - h'(1)) = 2h'(1) - h'(0)$ et $f'(1) = h'(1) - (h'(0) - h'(1)) = 2h'(1) - h'(0)$. Ainsi nous avons $f'(0) = f'(1)$. Le deux points précédents assurent donc que $f \in F$.

Nous avons donc prouvé que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ ce qui prouve que $h \in F + F$, ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) Nous avons : $\text{Arctan}(x) = x\,(1 + o_0(x))$ et $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6}(1 + o_0(x))$ donc :

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(x)(\sin(x) - x) &= -\tfrac{x^4}{6}\,(1 + o_0(x))\,(1 + o_0(x)) \\ &= \boxed{-\frac{x^4}{6} + o_0(x^5).}\end{aligned}$$

(b) En posant : $u = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o_0(x^4)\right)$ (qui est proche de 0 lorsque x est proche de 0), l'expression s'écrit :

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + 0_0(u^4),$$

avec :

- $$\begin{aligned} u^2 &= x^2\left(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{3} - \tfrac{x^3}{4} + o_0(x^4)\right)^2 \\ &= x^2\left(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right)\left(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right) \\ &= x^2\left(1 - x + \tfrac{x^2}{3} + \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^2}{3} + o_0(x^2)\right) \\ &= x^2 - x^3 + x^4\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + o_0(x^4) \\ &= x^2 - x^3 + \tfrac{11}{12}x^4 + o_0(x^4), \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} u^4 &= x^4\left(1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{3} - \tfrac{x^3}{4} + o_0(x^4)\right)^4 \\ &= x^4(1 + o_0(1)) \\ &= x^4 + o_0(x^4), \end{aligned}$$
- $o_0(u^4) = o_0(x^4)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\cos(\ln(1 + x)) &= 1 - \tfrac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + \tfrac{11}{12}x^4 + o_0(x^4)\right) + \tfrac{x^4}{24} + o_0(x^4) \\ &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^3 - \tfrac{11}{24}x^4 + \tfrac{x^4}{24} + o_0(x^4) \\ &= \boxed{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5}{12}x^4 + o_0(x^4).}\end{aligned}$$

(c) On pose : $u = \dfrac{x}{1 + x} = x\left(1 - x + x^2 + o_0(x^2)\right) = x - x^2 + x^3 + o_0(x^3)$. Alors l'expression devient :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3),$$

avec :

- $$\begin{aligned} u^2 &= x^2\left(1 - x + x^2 + o_0(x^2)\right)^2 \\ &= x^2\left(1 - x + +o_0(x)\right)^2 \\ &= x^2(1 - x + o_0(x))(1 - x + o_0(x)) \\ &= x^2(1 - 2x + o_0(x)) \\ &= x^2 - 2x^3 + o_0(x^3), \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} u^3 &= x^3\left(1 - x + x^2 + o_0(x^2)\right)^3 \\ &= x^3\left(1 + o_0(1)\right)^3 \\ &= x^3(1 + o_0(1)) \\ &= x^3 + o_0(x^3). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x}{1 + x}\right) &= 1 + x - x^2 + x^3 + o_0(x^3) + \tfrac{1}{2}\left(x^2 - 2x^3 + o_0(x^3),\right) + \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3) \\ &= 1 + x - x^2 + x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - x^3 + \tfrac{1}{6}x^3 + o_0(x^3) \\ &= \boxed{1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3).}\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{1}{2 + e^{-x}} = \dfrac{1}{2 + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)} = \dfrac{1}{3 - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)} = \frac{1}{3}\dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2}$. Nous posons alors : $u = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2) = -\frac{1}{6}x\,(1 - x + o_0(x))$ de sorte que l'expression s'écrive :

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1 + u} = \frac{1}{3}\left(1 - u + u^2 + o_0(u^2)\right),$$

avec : $$\begin{aligned} u^2 &= \tfrac{1}{9}x^2\left(1 - \tfrac{1}{3}x + o_0(x)\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{9}x^2\left(1 + o_0(1)\right) \\ &= \tfrac{1}{9}x^2 + o_0(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+e^{-x}} &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x^2+o_0(x^2)+\frac{1}{9}x^2+o_0(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+x^2\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\right)+o_0(x^2)\\ &= \boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x-\frac{1}{54}x^2+o_0(x^2).}\end{aligned}$$

Exercice 2:

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et tel que : $(X-1)P' = nP$.

1. Nous avons donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)P'(x) = nP(x)$, donc en prenant $x = 1$ cela donne $P(1) = 0$ ce qui prouve que 1 est racine de P.
2. Posons : $f(x) = (x-1)$ et $g(x) = P'(x)$. Nous savons que $f^{(p)}(x) = 0$ si $p \geq 1$ et que pour tout entier naturel p, $g^{(p)}(x) = P^{(p+1)}(x)$. L'application de la formule de Leibniz entraîne alors :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ (fg)^k(x) &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} f^{(p)}(x)g^{(k-p)}(x)\\ &= f(x)g^{(k)}(x)+\binom{k}{1}g^{(k-1)}(x),\end{aligned}$$

car à partir de 2, les dérivées successives de f s'annulent. Or, $\binom{k}{1} = k$, $g^{(k)}(x) = P^{(k+1)}(x)$ et $g^{(k-1)}(x) = P^{(k)}(x)$ donc :
$\forall k \in \mathbb{N}, (fg)^k(x) = (x-1)P^{(k+1)}(x)+kP^{(k)}(x)$. Il ne nous reste lus qu'à constater que : $(fg)(x) = nP(x)$ donc : $(fg)^{(k)}(x) = nP^{(k)}(x)$ ce qui donne la relation :

$(x-1)P^{(k+1)}(x)+kP^{(k)}(x) = nP^{(k)}(x) \Leftrightarrow (x-1)P^{(k+1)}(x) = (n-k)P^{(k)}(x)$. Au final :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ (X-1)P^{(k+1)} = (n-k)P^{(k)}.}$$

3. Si l'on note a_n le coefficient dominant de P, alors $P^{(n)} = n!a_n$ donc : $\boxed{P^{(n)}(1) = n!a_n.}$
4. D'après l'avant dernière question : $\forall k \in \mathbb{N}, (x-1)P^{(k+1)}(x) = (n-k)P^{(k)}(x)$. Ainsi, si $k < n$ en prenant $x = 1$, cela donne : $(n-k)P^{(k)}(1) = 0 \Leftrightarrow P^{(k)}(1) = 0$ puisque $n-k \neq 0$ si $k < n$. Cela prouve donc que : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n-1]\!],\ P^{(k)}(1) = 0.}$

   Par ailleurs : P est de degré n donc $a_n \neq 0$. Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{P^{(n)}(1) \neq 0.}$

   Les deux points précédents prouvent donc que <u>1 est racine de P de multiplicité n.</u>
5. Par factorisation, on en déduit : $P = a_n(X-1)^nQ$ avec Q constante car P est de degré n. L'identification des termes de plus haut degré mène à $Q = 1$ ce qui donne :
   $\boxed{P = a_n(X-1)^n.}$

Exercice 3:

1. On commence par étudier la liberté : soient donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $aX(X-1)+bX(X+1)+c(X-1)(X+1) = 0$. Alors, en évaluant l'expression associée en :

   - 0, cela donne : $-c = 0$ soit $c = 0$.
   - 1, cela donne : $2b = 0$ soit $b = 0$.
   - -1, cela donne : $2a = 0$ soit $a = 0$.

   La famille est donc libre et est de plus de taille maximale car son nombre d'éléments est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ à savoir 3. Par propriété, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On cherche à exprimer 1 en fonction de $X(X-1)$, $X(X+1)$ et $(X-1)(X+1)$. soient donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $aX(X-1)+bX(X+1)+c(X-1)(X+1)=1$. Alors, en évaluant l'expression associée en :

- 0, cela donne : $-c=1$ soit $c=-1$.
- 1, cela donne : $2b=1$ soit $b=\frac{1}{2}$.
- -1, cela donne : $2a=1$ soit $a=\frac{1}{2}$.

Ainsi : $\boxed{1=\dfrac{1}{2}X(X-1)+\dfrac{1}{2}X(X+1)-1\times(X-1)(X+1).}$

2. Pour $a\in\mathbb{R}$, on note $F_a=\{P\in E / P(a)=0\}$.

 (a) • Le polynôme nul s'annule en a donc $0_{\mathbb{R}_n[X]}\in F_a$.

 • Soient $(P,Q)\in F_a^2$ c'est à dire tels que : $P(a)=0$ et $Q(a)=0$. Posons : $R=\lambda P+\mu Q$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Alors :
 $R(a)=\lambda P(a)+\mu Q(a)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$. Ainsi $R\in F_a$ ce qui prouve que F_a est stable par combinaisons linéaires.

 Des deux points précédents, on en déduit que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

 (b) Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$. Alors : $P\in F_1\cap F_{-1}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}\begin{cases}P(1)=0\\P(-1)=0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=0\\a-b+c=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\c=-a\end{cases}\\ &\Leftrightarrow P=a(X^2-1)\\ &\Leftrightarrow P\in\operatorname{Vect}(X^2-1)\end{aligned}.$$

 Au final, $F_1\cap F_{-1}=\operatorname{Vect}((X-1)(X+1))$, ce qui prouve que $(X-1)(X+1)$ est une famille génératrice de $F_1\cap F_{-1}$. Toute famille constituée d'un seul élément non nul étant libre, on en déduit que $((X-1)(X+1)$ est une base de $F_1\cap F_{-1}$.

 (c) Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$. Alors : $P\in F_0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}P(0)=0 &\Leftrightarrow c=0\\ &\Leftrightarrow P=aX^2+bX\\ &\Leftrightarrow P\in\operatorname{Vect}(X,X^2)\end{aligned}.$$

 Ainsi, (X,X^2) est une famille génératrice de F_0. Elle est de plus libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de F_0 ce qui assure que $\boxed{\dim(F_0)=2.}$

 Par ailleurs : $X(X-1)$ et $X(X+1)$ s'annulent en 0 donc appartiennent à F_0. F_0 étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que : $\boxed{\operatorname{Vect}(X(X-1),X(X+1))\subset F_0.}$ Or $(X(X-1),X(X+1))$ est une sous-famille d'une base, cf question 1, donc d'une famille libre. Elle est donc nécessairement libre donc de rang 2, ce qui assure que : $\boxed{\dim(\operatorname{Vect}(X(X-1),X(X+1))=2=\dim(F_0)}$ par définition du rang. Les deux encadrés précédents entraînent alors que nécessairement : $\boxed{\operatorname{Vect}(X(X-1),X(X+1))=F_0.}$

 (d) Puisque d'après les questions précédentes, $F_0=\operatorname{Vect}(X(X-1),X(X+1))$ et $H=\operatorname{Vect}((X-1)(X+1))$, par propriété $F_0+H=\operatorname{Vect}(X(X-1),X(X+1),(X-1)(X+1))=\mathbb{R}_2[X]$ puisque cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ d'après la question 1 donc en particulier une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

 Par ailleurs, d'après la question 2 : $\dim(H)=1$ et d'après la question 3, $\dim(F_0)=2$. Ainsi : $\dim(H)+\dim(F_0)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$.

 On a donc prouvé que : $F_0+H=\mathbb{R}_2[X]$ et $\dim(H)+\dim(F_0)=\dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie :

 $\boxed{F_0\oplus H=\mathbb{R}_2[X].}$

Exercice 4:

1. Soit $E=\mathbb{R}^4$, et F l'ensemble des vecteurs $(x;y;z;t)$ tels que $x+y+z+t=0$, et G l'ensemble des vecteurs $(x;y;z;t)$ tels que $x+2y+3z+4t=0$.

   (a) • $F\subset\mathbb{R}^4$ est évident.

   • 0_{R^4} in E car $0+0+0+0=0$.

   • Soient $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\t_1\end{pmatrix}$ et $u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\\t_2\end{pmatrix}$ deux élément de F et $(\lambda;\ \mu)\in\mathbb{R}^2$.

   Alors : $\lambda u_1+\mu u_2=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\\lambda y_1+\mu y_2\\\lambda z_1+\mu z_2\\\lambda t_1+\mu t_2\end{pmatrix}$. Nous avons alors : $(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)+(\lambda z_1+\mu z_2)+(\lambda t_1+\mu t_2)=\lambda(x_1+y_1+z_1+t_1)+\mu(x_2+y_2+z_2+t_2)$. Or $u_1\in F$ donc $x_1+y_1+z_1+t_1=0$. De même : $u_2\in F$ donc : $x_2+y_2+z_2+t_2=0$. Par conséquent : $(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)+(\lambda z_1+\mu z_2)+(\lambda t_1+\mu t_2)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$ ce qui prouve que $\lambda u_1+\mu u_2\in F$.

   Les trois points précédents étant vérifiés, nous en déduisons que F est un sous-espace vectoriel de E.

   D'autre part soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors, si $u\in F$ nous avons : $x+y+z+t=0\Leftrightarrow x=-y-z-t$. Ainsi : $u=y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-1,0,0,1)$ donc $u\in\operatorname{Vect}\Big((-1,1,0,0);(-1,0,1,0);(-1,0,0,1)\Big)$. L'autre inclusion est également vraie car les trois vecteurs appartiennent à F est un sous-espace vectoriel. On en déduit : $F=\operatorname{Vect}\Big((-1,1,0,0);(-1,0,1,0);(-1,0,0,1)\Big)$.

   Ainsi, par définition, $\Big((-1,1,0,0);(-1,0,1,0);(-1,0,0,1)\Big)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus clairement libre. En effet : $y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-1,0,0,1)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow y=z=t=0$.

   La famille précédente est donc une base de F constituée de trois éléments ce qui assure que $\boxed{\dim(F)=3.}$

   (b) Soit $u=(x,y,z,t)$. Alors si $u\in F\cap G$ nous avons : $\begin{cases}x+y+z+t=0\\x+2y+3z+4t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y-z-t=z+2t\\y=-2z-3t\end{cases}$. Alors : $u=z(1,-2,1,0)+t(2,-3,0,1)$ donc $u\in\operatorname{Vect}((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$. Ainsi : $F\cap G\subset\operatorname{Vect}((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$. Or, l'inclusion réciproque est évidente car les deux vecteurs appartiennent à $F\cap G$ et $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Au final nous avons donc : $F\cap G=\operatorname{Vect}((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$ donc $((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$ est une famille génératrice de $F\cap G$. Elle est de plus clairement libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Il s'agit donc d'une base de $F\cap G$ constituée de deux élements ce qui entraîne que : $\boxed{\dim(F\cap G)=2.}$

   (c) On considère les sous-espaces vectoriels suivants : $H_1=F\cap G$, $H_2=\operatorname{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ et $H_3=\operatorname{Vect}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

   $((1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est une sous-famille de la base canonique donc d'une famille libre. Elle est donc libre par propriété. Elle est de plus génératrice de H_2 par définition. C'est donc une base de H_2 constituée de deux éléments ce qui entraîne : $\boxed{\dim(H_2)=2=\dim(H_1).}$

   Par ailleurs $\boxed{H_2\oplus H_3=E}$ est clair par propriété puisque la base canonique est une base.

   Il reste donc à vérifier que $H_1\oplus H_3=E$.

   • $\dim(H_1)+\dim(H_3)=4=\dim(E)$.
   • Montrons que $H_1\cap H_3=\{0_E\}$.

     L'inclusion $\{0_E\}\subset H_1\cap H_3$ est claire car $H_1\cap H_3$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrons : $H_1 \cap H_3 \subset \{0_E\}$. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in H_1 \cap H_3$. Alors comme $u \in H_3$, nécessairement : $x = y = 0$. De plus $u \in F \cap G$ donc : $z + t = 0$ (1) et $3z + 4t = 0$ (2) . En faisant (2)-3(1) nous en déduisons : $t = 0$ et donc $z = -t = 0$ ce qui entraine $u = 0_E$ ce qu'il fallait démontrer.

Par double inclusion : $H_1 \cap H_3 = \{0_E\}$.

Les deux points précédents assurent donc que : $\boxed{H_1 \oplus H_3 = E.}$

2. (a) L'existence de supplémentaires de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie est une propriété du cours qui assure l'existence de F' et G'.

   (b)
   - $\{0_E\} \subset F' \cap G'$ est vraie car $F' \cap G'$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Montrons que $F' \cap G' \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \cap F' \cap G'$. Alors comme $F' \subset F$ (F' est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F) et de même $G' \subset G$ on en déduit : $F' \cap G' \subset F \cap G$. Ainsi : $x \in \cap F \cap G$. Or $x \in F' \cap G'$ donc $x \in F'$. On en déduit : $x \in F' \cap (F \cap G)$. Or, par propriété des supplémentaires nous avons : $F' \cap F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent $x = 0_E$ ce qu'il fallait démontrer.

   (c) Puisque $F \cap G \oplus F' = F$, nous avons : $\dim(F \cap G) + \dim(F') = \dim(F)$ donc : $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. De la même façon $\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Mais $\dim(F) = \dim(G)$ par hypothèse. Ainsi : $\boxed{\dim(F') = \dim(G').}$

   (d) On note $(u_1, \dots, u_r)$ une base de F', $(v_1, \dots, v_r)$ une base de G' et $H' = \text{Vect}(u_1 + v_1, \dots, u_r + v_r)$.

   Par définition $\mathcal{F}$ est une <u>famille génératrice de H'</u>. Montrons maintenant que cette famille est libre. Soient donc :

   $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda(u_k + v_k) = 0$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda u_k = -\sum_{k=1}^{r} \lambda v_k$.

   Posons alors : $w = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda u_k$. Alors $w \in F'$ mais comme $w = -\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda v_k$ nous avons également $w \in G'$. Donc $w \in F' \cap G'$. Or d'après 2c $F' \cap G' = \{0_E\}$. Ainsi : $w = 0_E \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k = 0_E$. Or par hypothèse $(u_1, \dots, u_r)$ une base de F'. Cette famille est donc en particulier libre ce qui entraîne que nécessairement : $\forall k \in [\![1;\ r]\!],\ \lambda_k = 0$ et donc que la famille <u>$\mathcal{F}$ est libre.</u>

   $\mathcal{F} = (u_1 + v_1, \dots, u_r + v_r)$ étant libre et génératrice de H', c'est donc une <u>base de H'.</u>

   (e) Montrons que $F \oplus H' = F + G$. La propriété $G \oplus H' = F + G$ se démontrera de la même façon.

   - D'après la question précédente $\dim(H') = r$ donc : $\dim(F) + \dim(H') = p + r$. Or $r = \dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$ d'après précédemment. Comme $\dim(F) = p$ par définition de p, on en déduit : $\dim(F) + \dim(H') = 2\dim(F) - \dim(F \cap G)$. Par ailleurs d'après la relation de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2\dim(F) - \dim(F \cap G)$ car $\dim(F) = \dim(G)$ par hypothèse. Nous avons donc vérifié : $\boxed{\dim(F) + \dim(H') = \dim(F + G).}$
   - Montrons que $F \cap H' = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset F \cap H'$ étant évidente, il suffit juste de démontrer que : $F \cap H' = \{0_E\}$. Soit donc $x \in F \cap H'$. Alors : $x \in H'$ donc $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k(u_k + v_k)$. De plus $x \in F$ et $F = F \cap G \oplus F'$ donc : $x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in F'$. Ceci fournit alors la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k - u = -\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k + v$. Posons alors $w = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k - u$. Puisque $u \in F \cap G$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k \in G'$ nous avons donc $w \in G$. Or $-\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k + v \in F'$ donc

$w \in F' \cap G$. De plus $F' \subset F$ donc $w \in F$. On en déduit : $w \in F' \cap (F \cap G)$. Or, $F \cap G \oplus F' = F$ donc : $F \cap G \cap F' = \{0_E\}$ ce qui prouve que $w = 0$ donc : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = u$. Mais alors : $u \in G'$ et $u \in F \cap G$ par définition. Ainsi $u \in G' \cap (F \cap G)$. De la même façon, par supplémentarité : $G' \cap (F \cap G) = \{0_E\}$. Nous avons donc $u = 0_E$ ce qui nous mène à : $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = 0_E$. La famille $(v_1, \ldots, v_r)$ étant une base de G', elle est en particulier libre. Donc : $\forall k \in [\![1;\ r]\!],\ \lambda_k = 0$ ce qui entraîne $x = \sum_{k=1}^{r} \lambda(u_k + v_k) = 0_E$, ce qu'il fallait démontrer.

(f) On note H'' un supplémentaire à $F + G$ dans E et on pose : $H = H' + H''$. Alors : H est un supplémentaire commun à F et G.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆