Devoir surveillé n° 6.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
2. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ et $C(1,0,1)$.
3. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
   (b) Donner une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine du repère.
   (c) Calculer la distance de $I(2,-1,0)$ à $\mathcal{D}$.
4. (a) Montrer que $S : x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z = 0$ et $\mathcal{P} : x + y + z = -1$ sont sécants en un cercle C dont on précisera les coordonnées du centre ainsi que le rayon.
   (b) Donner une équation du plan tangent T à S en $A(-1,0,-1)$.
   (c) Étudier l'intersection de C et T.
5. Montrer que f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ admet un prolongement sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 que l'on précisera.
6. On pose : $f(x) = (x-1)\text{Arcsin}(\sqrt{x})$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur un ensemble I à préciser et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;\ 1]$.
   (c) f est-elle de classe C^1 en 0 ?

Exercice 2

On considère l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points $M(x;\ y)$ du plan vérifiant l'équation : $x^2+2(2m+1)x+y^2-2my+4m+1=0$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{C}_m$ est un cercle dont on précisera le centre Ω_m et le rayon R_m. Que vaut $\mathcal{C}_0$?
2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R},\ A(-1;\ 0) \in \mathcal{C}_m$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente T en $\mathcal{C}_m$ passant par A. Donner également une équation réduite de T. Qu'y a-t-il de remarquable dans ce résultat ?
3. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, Ω_m appartient à une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique.
4. Déterminer les intersections de $\mathcal{C}_{-1}$ avec Δ.
5. En vous aidant des informations ci-dessus, représenter la famille de cercles $\mathcal{C}_m$ sur le plan.

Exercice 3

On note $f(x) = e^x$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. On considère $a \in]0;\ 1[$ fixé, $A \in \mathbb{R}$ tel que :
$f(a) - S_n(a) = a^{n+1}A$ et on pose h d'expression : $h(t) = f(t) - S_n(t) - t^{n+1}A$. Soit $t \in [0;\ a]$.

1 Vérifier que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0$ et $h(a) = 0$.

2 Énoncer le théorème de Rolle.

3 En déduire l'existence de $c \in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+1)}(c) = 0$.

4 Finalement montrer que : $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

5 En déduire : $|f(a) - S_n(a)| \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$ puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} = e^a$.

Exercice 4

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in [e, +\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
   (b) En déduire que : $\forall y \in [e, +\infty[,\ |f(y) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|y - e|$.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.
   (b) En déduire, en vous aidant de 1b, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ | u_n - e |\leq \frac{1}{4^n}$.
   (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (d) Déterminer un entier n_1 à partir duquel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Problème

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
2. Montrer que la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2.
3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v de classe C^n.
4. On suppose, uniquement dans cette question $n \geq 2$.
   En utilisant la relation : $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2 :
   $$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$
5. On pose, pour tout entier naturel p : $u_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
   (a) Que valent u_0 et u_1 ?
   (b) On suppose, uniquement dans cette question : $p \geq 2$. Montrer que : $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
   (c) En remarquant que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, u_p en fonction de p, λ_1 et λ_2.
6. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :$\dfrac{1}{x^2 + x - 1} = \dfrac{\alpha}{x - \lambda_1} + \dfrac{\beta}{x - \lambda_2}$.
   (b) Déterminer, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{nième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x - \lambda_1}$.
   Donner, de même, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{nième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\beta}{x - \lambda_2}$.
   (c) Retrouver alors le résultat du 5c.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. Cf. cours.
2. $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = x+y+z-2$. Une équation cartésienne du plan demandé est donc : $x+y+z-2=0$.
3. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$.

   (a) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

   (b) Soit $M(x;\ y;\ z)$. Alors $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3y-2z \\ z-3x \\ 2x-y \end{pmatrix}$. Une représentation cartésienne de $\mathcal{D}'$ est donc : $\begin{cases} 2x-y=0 \\ z-3x=0 \end{cases}$

   (c) $d(I,\mathcal{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||} = \dfrac{\sqrt{10}}{7}$.

4. (a) $S : (x+1/2)^2 + (y+1/2)^2 + (z+1/2)^2 = 3/4$ donc S est une sphère de centre $\Omega(-1/2;\ -1/2;\ -1/2)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   $d(\Omega,\mathcal{P}) = \dfrac{|-3/2+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Puisque cette valeur est strictement inférieure à R l'intersection est un cercle.

   Son rayon est $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,\mathcal{P})^2} = \sqrt{\dfrac{17}{12}}$.

   Son centre $\omega(a;\ b;\ c)$ est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$. Nous avons donc : $\overrightarrow{\Omega\omega} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et $a+b+c=0$ ce qui donne : $a = t-1/2, b = t-1/2, c = t-1/2$ d'où : $3t - 3/2 = -1$. Ainsi : $t = \frac{1}{6}$ et donc $\omega(-1/3;\ -1/3;\ -1/3)$.

   (b) Soit $M(x;\ y;\ z)$. Alors : $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM} = -x/2 + y/2 - z/2 - 1$. Une équation du plan tangent demandé est donc : $x - y + z + 2 = 0$.

   (c) On commence par étudier l'intersection de T et $\mathcal{P}$. Il s'agit d'une droite passant par $B(-1, 1/2, -1/2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On obtient donc $\begin{cases} x = t-1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -t - \frac{1}{2} \end{cases}$ pour représentation paramétrique. Pour qu'un point de cette droite appartienne à S nous avons de plus : $t^2 - 2t + 1 + t - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + t^2 + t + \frac{1}{4} - t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t + \frac{1}{2} = 0$ ce qui donne un trinôme de discriminant strictement négatif donc une intersection vide.

5. Cf. exercice du jour.
6. Cf. exercice du jour.

Exercice 2:

On considère l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points $M(x;\ y)$ du plan vérifiant l'équation : $x^2 + 2(2m+1)x + y^2 - 2my + 4m + 1 = 0$.

1. $x^2 + 2(2m+1)x + y^2 - 2my + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + (2m+1))^2 + (y-m)^2 = 5m^2$. On reconnaît alors un cercle de $\underline{\text{centre } \Omega_m(-(2m+1);\ m)}$ et de rayon $\underline{R_m = \sqrt{5m^2} = \sqrt{5}|m|}$. Pour $m = 0$ on obtient le cercle de rayon 0 et de centre $(-1,1)$ c'est à dire le point $(-1,1)$.
2. Pour tout réel m, $(-1)^2 + 2(2m+1)(-1) + 0^2 - 2m \times 0 + 4m + 1 = 0$ ce qui prouve que pour tout réel $m \neq 0$, $\underline{A \in \mathcal{C}_m}$.

$M(x;\ y) \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega_m} = 0$. Or : $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A\Omega_m} = \begin{pmatrix} -2m \\ m \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de T est donc : $\boxed{-2mx + my - 2m = 0}$. Une équation réduite est donc : $\underline{y = 2x + 2}$. Il s'agit d'une seule et même droite qui est tangente à tous les cercles $\mathcal{C}_m$ en A.

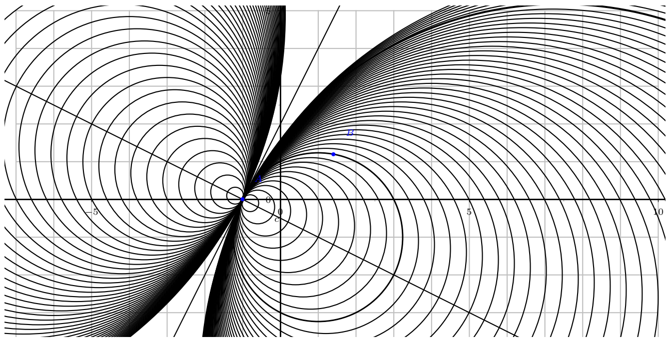
3. On en déduit que Ω_m appartient à la perpendiculaire à T passant par A. On note Δ cette droite, on en déduit :

   $M(x;\ y) \in \Delta \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{n}\right] = 0$, avec $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal à T. Une équation cartésienne de Δ est donc :

   $x + 1 + 2y = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + 2y + 1 = 0.}$ Un vecteur directeur de cette droite est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(-1;\ 0) \in \Delta$. Une représentation paramétrique de Δ est donc : $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \end{cases}$.

4. $\mathcal{C}_{-1}$ a pour équation : $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 3 = 0$. L'intersection de C^{-1} avec Δ s'obtient donc, à l'aide de la question précédente, en résolvant l'équation :

   $(-2t-1)^2 - 2(-2t-1) + t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t(5t+10) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -2$. Pour $t = 0$, nous obtenons le $\underline{\text{point } A}$ et pour $t = -2$, nous obtenons le $\underline{\text{point } B(3;\ -2).}$

5. 

Exercice 3:

On note $f(x) = e^x$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. On considère $a \in]0;\ 1[$ fixé, $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$f(a) - S_n(a)) = a^{n+1}A$ et on pose h d'expression : $h(t) = f(t) - S_n(t) - t^{n+1}A$. Soit $t \in [0;\ a]$.

1 S_n est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par opérations usuelles, $\underline{h \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ donc en particulier sur $\underline{[0;\ a].}$

L'égalité de Taylor-Lagrange appliquée au polynôme P donne : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{S_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Nous avons donc :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{S_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$ ce qui donne par identification des coefficients la relation :

$\forall k \in [\![0;\ n]\!],\ S_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$. Cela entraîne donc : $\boxed{\forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0.}$ Par ailleurs, par définition de a, $\boxed{h(a) = 0.}$

2 Cf. Cours.

3 Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} \forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]0;\ a[,\ h^{(n+1)}(c) = 0.$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, comme h est dérivable sur $]0;\ a[$, continue sur $[0;\ a]$ (car de classe C^∞ sur $[0;\ a]$) et que $h(a) = h(0)(= 0)$, l'application directe du théorème de Rolle fournit l'existence de $c \in]0;\ a[$ tel que : $h'(c) = 0$.

- **Hérédité :** Soit h telle que : $\begin{cases} \forall k \in [\![0;\ n+1]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$. Alors en particulier : $\begin{cases} \forall k \in [\![0;\ n]\!], h^{(k)}(0) = 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $c_1 \in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+1)}(c_1) = 0$. Mais alors : $h^{(n+1)}(c_1) = h^{(n+1)}(0) = 0$. Comme h est de classe C^∞ sur $[0;\ c_1]$, il est assuré que $h^{(n+1)}$ est continue sur $[0;\ c_1]$ et dérivable sur $]0;\ c_1[$. D'après le théorème de Rolle, on en déduit l'existence de $c\in]0;\ c_1[$ tel que : $(h^{n+1})'(c)=0$. Comme $]0;\ c_1[\subset]0;\ a[$ et que : $(h^{n+1})'=h^{(n+2)}$ nous en déduisons l'existence de $c\in]0;\ a[$ tel que : $h^{(n+2)}(c)=0$ ce qui prouve l'hérédité.

4 D'après la question précédente, $c\in]0;\ a[,\ h^{(n+1)}(c)=0$. Or, S_n est de degré inférieur ou égal à n donc la dérivée $n+1$-ème de S_n s'annule. Par conséquent : $h^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!A$. Par conséquent : $f^{(n+1)}(c)-(n+1)!A\Leftrightarrow$ $\boxed{A=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$.

5 On en déduit : $f(a)-S_n(a)=a^{n+1}A=\dfrac{a^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}=\dfrac{a^{n+1}e^c}{(n+1)!}$. Ainsi : $|f(a)-S_n(a)|=\dfrac{a^{n+1}e^c}{(n+1)!}$. Pour finir, $0<a<1$ donc : $a^n\leq 1$ et $c<a$ donc $e^x<e^a<e$. On en déduit :

$$\boxed{0\leq|f(a)-S_n(a)|\leq\frac{e}{(n+1)!}}.$$

Enfin par opérations usuelles : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e}{(n+1)!}=0$ donc par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(a)-S_n(a)|=0$, ce qui revient à dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(a)=f(a)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}a^k=f(a)$. Ici, $f=exp$ donc $f(a)=e^a$ et $f^{(k)}(0)=e^0=1$. Nous avons donc prouvé :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}=e^a,}$$

et ce pour tout $a\in]0;\ 1[$.

Exercice 4:

1. (a) Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $[e;\ +\infty[$ et $\forall x\in[e;\ +\infty[,\ f'(x)=\dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$.

   Puisque $x\geq e$, nous avons $\ln(x)\geq 1$ ce qui prouve que $\forall x\in[e;\ +\infty[,\ f'(x)\geq 0$.

   Par ailleurs : $f'(x)\leq\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}-\dfrac{1}{4}\leq 0$
   $\Leftrightarrow\dfrac{4\ln(x)-4-\ln^2(x)}{4\ln^2(x)}$.

   En posant $X=\ln(x)$, le numérateur se ramène au trinôme : $-4X^2+4X-1$? Ce dernier a un discriminant nul et un coefficient dominant négatif donc est toujours de signe négatif. Le dénominateur est positif en tant que carré d'un nombre réel. Au final, nous en déduisons : $\forall x\in[e;\ +\infty[,\ f'(x)\leq\dfrac{1}{4}$.

   Nous avons montré : $\boxed{\forall x\in[e;\ +\infty[,\ 0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{4}.}$

   (b) Soient $y\geq e$ et $I=[e;\ y]$, alors : f est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $0\leq f'(x)\leq 14$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

   $0\leq f(y)-f(e)\leq\dfrac{1}{4}(y-e)\Leftrightarrow\boxed{|f(y)-f(e)|\leq\dfrac{1}{4}|y-e|.}$

2. (a) On procède par récurrence en utilisant le fait que f est croissante sur $[e;\ +\infty[$ (vu en 1(a)) :

   Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n\geq e$ ».

   - **Initialisation :** $U_0=3\geq e$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Pour $n\geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $u_n\geq e$. La fonction f est croissante sur $[e;\ +\infty[$. Donc $f(u_n)\geq f(e)$. Comme $f(1)=1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(e)=e$, on en déduit : $u_{n+1}\geq 1$. Donc la propriété est héréditaire.

   Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\geq 0, u_n\geq e.}$

(b) En reprenant **??** avec $y = e$ (possible puisque l'inégalité est vraie pour $y \geq e$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$ d'après le point précédent), nous en déduisons :
$|f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|u_n - e| \Leftrightarrow \boxed{|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|.}$

On en déduit alors par récurrence : $\boxed{|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.}$ En effet :

- **Initialisation :** $|u_0 - e| \leq 1$ car $u_0 = 3$ et $e \in [2;\ 3]$.
- **Hérédité :** Pour $n \geq 0$, si $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ est vérifiée, alors d'après l'inégalité ci-dessus : $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e| \leq \underbrace{\frac{1}{4}\frac{1}{4^n}}_{=\frac{1}{4^{n+1}}}$. D'où l'hérédité.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$. Or $O \leq |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ donc par théorème d'encadrement :
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - e| = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ converge et } \lim\limits_{u_n \to =} e.}$

(d) Si : $\frac{1}{4^{n_0}} \leq 10^{-12}$, alors : $|u_{n_0} - e| \leq \frac{1}{4_0^n} \leq 10^{-12}$ et donc u_{n_0} est par définition une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Or : $\frac{1}{4_0^n} \leq 10^{-12} \quad \Leftrightarrow 4^{n_0} \leq 10^{12}$
$\Leftrightarrow n_0 \ln(4) \geq 12\ln(10)$
$\Leftrightarrow n_0 \geq \frac{12\ln(10)}{\ln(4)}$.

Il suffit donc de prendre $\boxed{n_0 = \lfloor \frac{12\ln(10)}{\ln(4)} \rfloor + 1}$, pour être assuré que : $n_0 \geq \frac{12\ln(10)}{\ln(4)}$

Problème :

1. Les racines sont $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, donc les théorèmes usuels montrent que f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.
3. $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$.
4. On applique la formule de Leibniz à l'ordre n au produit $(x^2 + x - 1)f(x)$ et comme les dérivées d'ordre 3 ou plus du polynôme sont toutes nulles, on obtient directement la formule de l'énoncé.
5. (a) $a_0 = f(0) = -1$ et $a_1 = f'(0) = -1$.
   (b) La relation obtenue au II.4, appliquée en $x = 0$, fournit, pour $p \geq 2$: $-p!u_p + p.(p-1)!u_{p-1} + p(p-1).(p-2)!u_{p-2} = 0$, ce qui se simplifie par $p!$ et donne $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
   (c) On a reconnu une suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $x^2 = x + 1$, dont les racines sont $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$. On sait qu'il existe alors deux constantes a et b telles que, $\forall p, u_p = \frac{a}{\lambda_1^p} + \frac{b}{\lambda_2^p}$.
   Les conditions $u_0 = u_1 = -1$ conduisent alors à $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ donc
   $$\forall p, u_p = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p}.$$
6. (a) On trouve facilement $\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2}\right)$ ce qui revient à dire que $\alpha = -\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
   (b) On a $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x-\lambda} = \frac{(-1)^n n!}{(x-\lambda)^{n+1}}$, ce qu'établit facilement une récurrence sur n.
   (c) On en déduit que
   $$u_p = \frac{1}{p!}(-\frac{1}{\sqrt{5}})\left(\frac{(-1)^p p!}{(-\lambda_1)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p}{(-\lambda_2)^{p+1}}\right) = \frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p},$$
   ce qui est la même réponse qu'en 5c puisque $\frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆