Devoir surveillé n° 5.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Questions de « cours »-

1. Calculer $\mathrm{pgcd}(246, 117)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
3. Résoudre $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
4. On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n $a_n = n!$.
5. Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$ sont adjacentes.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.
3. On suppose dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < 1$.
   (a) Montrer que, sous cette hypothèse, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) En déduire qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et aboutir à une contradiction. **Ainsi, il existe $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{u_p} \geq 1$.**
4. Montrer que $\forall n \geq p$, $u_n \geq 1$.
5. Posons $w_n = \sqrt{u_n} - 2$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{4 + w_{n+2}}$.
   (b) En déduire que pour $n \geq p,\ |w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|w_{n+1}| + |w_n|)$.
6. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_p = |w_p|$, $v_{p+1} = |w_{p+1}|$ et :
$$\forall n \geq p,\ v_{n+2} = \frac{1}{3}(v_{n+1} + v_n).$$
   (a) Montrer que : $\forall n \geq p, |w_n| \leq v_n$.
   (b) À l'aide d'une expression simple de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

Exercice 3

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \geq 1,\ 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$.

A - Généralités sur l'ensemble E.

A- 1) Déterminer les suites arithmétiques appartenant à E.

A- 2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

A- 3) Proposer un exemple de suite bornée appartenant à E.

A- 4) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

A- 5) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

B - On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle <u>bornée</u> appartenant à E.

B- 1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'expression $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite monotone.

B- 2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

B- 3) On veut montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour ceci, on suppose par l'absurde que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$.

(a) Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \ell - \frac{|\ell|}{2} \leq u_{n+1} - u_n \leq \ell + \frac{|\ell|}{2}$.

(b) Soit $n \geq N+1$. Déduire de la question précédente que : $(n-N)\left(\ell - \frac{|\ell|}{2}\right) \leq u_n - u_N \leq (n-N)\left(\ell + \frac{|\ell|}{2}\right)$.

(c) Montrer que si $\ell > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ puis aboutir à une contradiction.

(d) Conclure.

B- 4) En déduire le signe de v_n puis la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Correction de l'exercice 1:

1.

$$\begin{aligned} 246 &= 2 \times 117 + 12 \\ 117 &= 9 \times 12 + 9 \\ 12 &= 1 \times 9 + 3 \\ 9 &= 3 + 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\text{pgcd}(246, 117) = 3.}$

2. Cf. fiche méthode.
3. Cf. fiche méthode.
4. Cf. fiche méthode.
5. Cf. fiche méthode.

Correction de l'exercice 2:

1. Récurrence aisée, laissée au lecteur.
2. Supposons que la suite de terme général u_n converge. Notons ℓ sa limite. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, $\ell \geq 0$. Par opérations élémentaires, la suite de terme général $\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$ converge vers $2\sqrt{\ell}$. En passant l'égalité à la limite, nous avons alors : $l = 2\sqrt{\ell}$ ce qui donne $\boxed{\ell = 0 \text{ ou } \ell = 4.}$
3. (a) De l'hypothèse, nous déduisons que $\sqrt{u_{n+1}} \geq u_{n+1}$. Comme $\sqrt{u_n} \geq 0$, alors $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Ainsi la suite de terme général u_n est croissante.
   (b) Par hypothèse, elle est majorée. Le théorème de la limite monotone assure alors que cette suite converge. Par croissance , $\ell \geq u_0 > 0$. De plus $\ell \leq 1$ puisque par hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$. Ceci est en contradiction avec la question 2. Ainsi, il existe $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$ **tel que** $\mathbf{u_p \geq 1}$.
4. Nous montrons ceci par récurrence. Pour $n = p$, c'est évident. Supposons que nous ayons pour $n \geq p$, $u_n \geq 1$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \geq \sqrt{u_n}$. Puisque, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$, alors $\sqrt{u_n} \geq 1$. D'où le résultat par récurrence.
5. (a) En multipliant par l'expression conjuguée, nous obtenons $w_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} - 4}{\sqrt{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}} + 2} = \boxed{\dfrac{w_{n+1} + w_n}{4 + w_{n+2}}}.$
   (b) Pour $n \geq p$, $w_{n+2} + 4 = \sqrt{u_n} + 2 \geq 3$ puisque $\sqrt{u_n} \geq 1$. En passant à la valeur absolue l'égalité précédente : $|w_{n+2}| = \left|\dfrac{w_{n+1} + w_n}{4 + w_{n+2}}\right| \leq \dfrac{|w_{n+1}| + |w_n|}{4 + w_{n+2}}$ par inégalité triangulaire. Comme $w_{n+2} + 4 = \sqrt{u_n} + 2 \geq 3$, nous obtenons au final l'inégalité demandée.
6. (a) Nous montrons ceci par récurrence forte. Pour $n = p$ le résultat est évident. Supposons $|w_k| \leq v_k$ pour $p \leq k \leq n$ et montrons que le résultat est vrai au rang $n + 1$. Nous distinguons deux cas : si $n = p$, alors $u_{n+1} = |w_{p+1}| = v_{n+1}$ par hypothèse. Sinon : $|w_{n+1}| \leq \frac{1}{3}(|w_n| + |w_{n-1}|) \leq \frac{1}{3}(v_n + v_{n-1})$ par hypothèse de récurrence $(n - 1 \geq p)$. Comme $v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n + v_{n-1})$, on en déduit le résultat voulu.
   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants. En résolvant son équation caractéristique, nous voyons qu'il existe deux réels A et B tels que $\forall n \geq p,\ v_n = A\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n$. Nous vérifions facilement $\left|\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right| < 1$ et $\left|\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right| < 1$. Par somme, la suite de terme général (v_n) converge donc vers 0.
   (c) Par théorème d'encadrement la suite de terme général $|w_n|$, donc la suite de terme général w_n, convergent vers 0. Enfin, $u_n = (w_n + 2)^2$. Par somme et produit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

Correction de l'exercice 3:

A - Généralités sur l'ensemble E.

A- 1) Soit (u_n) une suite arithmétique. Il existe donc $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2 \ /\ u_n = an + b$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2(an + b) \leq a(n - 1) + b + a(n + 1) + b \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq 0. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que toutes les suites arithmétiques appartiennent à E.

A- 2) Posons : $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2a^n \leq a^{n-1} + a^{n+1}\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2a \leq 1 + a^2 \text{ en divisant par } a^{n-1} > 0\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a-1)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $\boxed{(a^n) \in E \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}_+^*.}$

A- 3) En considérant la question précédente, on voit que : $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un exemple de suite bornée appartenant à E.

A- 4) Soit (u_n) une suite réelle appartenant à E. Alors par hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$. En multipliant l'inégalité par $\lambda > 0$ on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\lambda u_n \leq \lambda u_{n-1} + \lambda u_{n+1}$ ce qui traduit le fait que : $\boxed{(\lambda u_n) \in E}$ ce qu'il fallait démontrer.

A- 5) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles appartenant à E. Alors par hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2v_n \leq v_{n-1} + v_{n+1}$. En sommant les deux inégalités on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2(u_n + v_n) \leq (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n+1} + v_{n+1})$ ce qui traduit le fait que : $\boxed{(u_n + v_n) \in E}$ ce qu'il fallait démontrer.

B - On considère maintenant une suite (u_n) une suite réelle bornée appartenant à E.

B- 1) Posons : $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors : $v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$. Or : $(u_n) \in E$ donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+2}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \leq 0$ ce qui prouve que (v_n) est décroissante.

B- 2) Par hypothèse : (u_n) est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}_+ \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$. En particulier : $|u_n| \leq M$ et $|u_{n+1}| \leq M$. Or, par inégalité triangulaire : $|v_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}|$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq 2M$.

Au final, (v_n) est bornée donc en particulier minorée. De plus (v_n) est décroissante d'après la question précédente. Nécessairement, d'après le théorème de la limite monotone, (v_n) est convergente.

B- 3) On veut montrer que (v_n) converge vers 0. Pour ceci, on suppose par l'absurde que (v_n) converge vers $\ell \neq 0$.

(a) Puisque (v_n) est convergente ver ℓ, d'après la définition de la limite : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon.$

Posons alors $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2}$. Puisque $\ell \neq 0$ par hypothèse, nous avons $\varepsilon > 0$ donc par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N,\ \ell - \frac{|\ell|}{2} \leq u_{n+1} - u_n \leq \ell + \frac{|\ell|}{2}$, ce qu'ail fallait démontrer.

(b) D'après la question précédente, si $n \geq N+1$ (et donc $n-1 \geq N$) : $\displaystyle\sum_{k=N}^{n-1}\left(\ell - \frac{|\ell|}{2}\right) \leq \sum_{k=N}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=N}^{n-1}\left(\ell + \frac{|\ell|}{2}\right)$. Or, par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=N}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_N$. De plus : $\displaystyle\sum_{k=N}^{n-1}\left(\ell - \frac{|\ell|}{2}\right) = (n-N)\left(\ell - \frac{|\ell|}{2}\right)$ et de même : $\displaystyle\sum_{k=N}^{n-1}\left(\ell + \frac{|\ell|}{2}\right) = (n-N)\left(\ell + \frac{|\ell|}{2}\right)$. Au final nous avons :

$$\boxed{\forall n \geq N+1,\ (n-N)\left(\ell - \frac{|\ell|}{2}\right) \leq u_n - u_N \leq (n-N)\left(\ell + \frac{|\ell|}{2}\right).}$$

(c) On suppose : $\ell > 0$. Alors $|\ell| = \ell$ et donc d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_N + (n-N)\dfrac{\ell}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(u_N + (n-N)\frac{\ell}{2}\right) = +\infty$, par encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$. Contradiction puisque (u_n) est bornée par hypothèse.

(d) De la même façon si $\ell < 0$, alors $|\ell| = -\ell$ et donc d'après B(3)b, $\forall n \geq N+1,\ u_n \leq u_N + (n-N)\frac{\ell}{2}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(u_N + (n-N)\frac{\ell}{2}\right) = -\infty$

car $\ell < 0$. Ainsi, par encadrement : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$. Contradiction puisque (u_n) est bornée par hypothèse.

Dans tous les cas, si $\ell \neq 0$ nous aboutissons à une contradiction ce qui assure que nécessairement $\underline{\ell = 0}$. Bref, $\underline{v_n \text{ converge nécessairement vers } 0}$.

B- 4) (v_n) étant décroissante vers 0 on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n \geq 0$. Par conséquent, $\underline{(u_n) \text{ est croissante}}$. Comme elle est de plus bornée donc majorée, d'après le théorème de limite monotone, $\underline{(u_n) \text{ est convergente.}}$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆