Devoir surveillé n° $5 - partie 2$.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Petits exercices en vrac -

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application f définie par : $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.
3. Étudier l'existence d'un prolongement par continuité sur $[-1;\ +\infty[$ de la fonction définie sur $]-1;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$.
4. Montrer que $f : [0;\ 1] \to [0;\ 1]$ continue admet au moins un point fixe.
5. Montrer, à l'aide de la définition de la limite que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3) = +\infty$.
6. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ avec $L > 0$. Montrer que f est strictement positive sur un voisinage de a.

Exercice 2

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer la matrice $N = A - I$. En déduire N^2 et N^3.
   Sans récurrence, donner et justifier la valeur de N^k lorsque $k \geq 3$.
   (b) En déduire une expression simple de A^n en fonction de N.
2. (a) Par la méthode du pivot, justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
   (b) La formule de la question 1.(b) est-elle encore valable lorsque $n = -1$?

On essaie maintenant de déterminer l'expression des suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1 \text{ et } z_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

3. (a) De quel type est la suite (z_n) ? En déduire pour tout entier naturel n l'expression de z_n en fonction de n.
   (b) En déduire alors le type de la suite (y_n) puis donner, pour tout entier naturel n, l'expression de y_n en fonction de n.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Préciser X_0 et montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace de** M et on note $\mathrm{tr}(M)$ le nombre égal à la somme des coefficients diagonaux d'une matrice :

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

(Q 1) Calculer $\mathrm{tr}(I_n)$.

(Q 2) Soient $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1;\cdots;n\}}; B = (b_{ij})_{i,j\in\{1;\cdots;n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$.

(c) Quel est le coefficient diagonal $(i; i)$ de la matrice AB? Montrer alors que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

(Q 3) En utilisant la trace, existe-t-il deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

(Q 4) On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

(a) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(B^n)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est à dire telle que : $A^T = -A$.

(Q 1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $X^T X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

(Q 2) En déduire que $X^T X = 0 \Rightarrow X = 0_{n,1}$.

(Q 3) Dans la suite de l'exercice, $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}^*}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$
Montrer que

$$(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \Rightarrow X^T AX = \lambda X^T X$$

(Q 4) Montrer que cela implique $X^T A^T X = \lambda X^T X$.

(Q 5) En déduire la valeur de X à l'aide des questions précédentes puis que $(A - \lambda I_n)$ est inversible.

(Q 6) Soit $B = (A - \lambda I_n)^{-1}(A + \lambda I_n)$. Montrer que $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et donner une expression de B^{-1}.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. • Par composition et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   • $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq |f(x)| \leq |x|$. Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Or $f(0) = 0$. Nous avons donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ce qui prouve que f est continue en 0.
   • Des deux points précédents, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On raisonne par l'absurde. On suppose donc que f admet une limite L : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Alors :
   • Pour $x_n = n$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Or, $f(x_n) = n - \lfloor n \rfloor = n - n = 0$. Ainsi $L = 0$.
   • Pour $y_n = n + \frac{1}{2}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = L$. Or, $f(y_n) = n + \frac{1}{2} - \lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor = n + \frac{1}{2} - n = \frac{1}{2}$. Ainsi $L = \frac{1}{2}$.

   Nous avons donc une contradiction avec l'unicité de la limite. Nous prouvons donc que $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } +\infty.}$
3. • Par opérations usuelles, f est continue sur $]-1;\ +\infty[-\{0\}$.
   • Par opérations usuelles : $\lim_{x\to-1} f(x) = 0$.
   • Par limite usuelles : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   On en déduit que f admet un prolongement par continuité sur $[-1;\ +\infty[$.
4. Cf TD.
5. Cf Fiche méthode.
6. Cf Cours.

Exercice 2:

1. (a) Nous avons : $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{N^3 = 0_3.}$ Pour $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0_3 N^{k-3} = \boxed{0_3}$.
   (b) Nous avons $NI = IN = N$ car I est le neutre du produit matriciel. Ainsi, d'après le binôme de Newton :

$$
\begin{aligned}
(N+I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I \quad \text{car } I^{n-k} = I \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \quad \text{car } N^k I = N^k \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=O_3(\mathbb{K})} \\
&\quad \text{D'après Chasles pour } n \geq 3 \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= I + nN + \tfrac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, nous remarquons qu'en fait la formule est valable pour $n = 2$, puisque d'après le binôme de Newton : $(N+I)^2 = I + 2N + N^2 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $A = N + I$, donc $A^n = (N+I)^n$, ce qui donne d'après ci-dessus :

pour $n \geq 2$, $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Pour $n = 0$, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la formule est vraie.

Pour $n = 1$, $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la formule est vraie.

2. (a) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & & = b_1 \\ & y & +z & = b_2 \\ & & z & = b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b_1 - b_2 + b_3 \\ y = b_2 - b_3 \\ z = b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Le système admettant une unique solution, on en déduit que A est inversible

et $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

(b) Il s'agit d'une vérification immédiate : OUI, la formule est encore vraie pour $n = -1$.

3. (a) La suite (z_n) est constante, donc pour tout entier naturel n, $\boxed{z_n = z_0 = 1.}$

(b) On en déduit : $y_{n+1} = y_n + 1$. La suite (y_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $y_0 = 1$. Par conséquent : $\boxed{y_n = y_0 + nr = n + 1.}$

4. (a) Nous avons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + n + 1 \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) On note $\mathcal{P}(n)$ « $X_n = A^n X_0$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **initialisation.** Pour $n = 0$, nous avons $A^0 X_0 = IX_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **hérédité.** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $X_n = A^n X_0$. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
  D'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$. Ainsi, $X_{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui prouce l'hérédité.

BILAN : $\boxed{\text{Par récurrence, pour tout entier naturel } n,\ X_n = A^n X_0.}$

(c) De la question précédente et du 1.(b), nous obtenons pour tout entier naturel n :

$\begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n + 1 + \frac{n(n-1)}{2} \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\boxed{x_n = n + 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n+2).}$$

Exercice 3:

(Q 1) $\mathrm{tr}(I_n) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

(Q 2) (a) $\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii}$ par linéarité de la somme. Ainsi, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

(b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^n \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \mathrm{tr}(A)$ par linéarité de la somme.

(c) Le coefficient diagonal $(i;i)$ de la matrice AB est $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$. Par définition $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ki}$ **par propriété des sommes rectangulaires**. On reconnait $\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$ le coefficient diagonal (k,k) de BA. Finalement, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(Q 3) On suppose que A et B existent. Alors, $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0$ par propriété de la trace. Or $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$ par hypothèse. C'est donc absurde et il n'existe pas de matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

(Q 4) (a) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(BP^{-1}P)$ par propriété de la trace. Or $P^{-1}P = I_n$. Par conséquent, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. Deux matrices semblables ont donc même trace.

(b) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n : $A^n = PB^nP^{-1}$ (cf TD). D'après la question précédente on en déduit : $\mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(B^n)$.

Exercice 4:

(Q 1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par la formule du produit matriciel, $X^T X$ est une matrice de 1 ligne et 1 colonne égale à

$$\boxed{X^T X = \Big(\sum_{k=1}^n x_k^2\Big).}$$

(Q 2) Si $X^T X = 0_{11}$ alors $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$. Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous les nombres sont nuls. Finalement, $\boxed{\forall k \in \{1;\cdots;n\}, x_k = 0.}$ L'implication est donc démontrée.

(Q 3)

$$(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1} \Rightarrow AX = \lambda X \Rightarrow X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X.$$

(Q 4) Par passage à la transposée :

$$(X^T AX)^T = (\lambda X^T X)^T \Rightarrow X^T A^T (X^T)^T = \lambda X^T (X^T)^T$$

De plus, la transposée de la transposée d'une matrice est cette matrice :

$$X^T A^T X = \lambda X^T X$$

(Q 5) Puisque la matrice A est anti-symétrique :

$$X^T(-A)X = \lambda X^T X \Leftrightarrow X^T AX = -\lambda X^T X$$

Or $X^T AX = \lambda X^T X$. Finalement

$$-\lambda X^T X = \lambda X^T X \Leftrightarrow 2\lambda X^T X = 0_{11} \Leftrightarrow X^T X = 0_{11}$$

car $\lambda \neq 0$.

Par la première question, cela implique que X est la matrice nulle.

On a montré :

$$(A - \lambda I_n)X = 0_{n1} \Rightarrow X = 0_{n1}.$$

L'équation homogène associée à $A - \lambda I_n$ a donc le vecteur nul pour unique solution. Par propriété la matrice $(A - \lambda I_n)$ est donc inversible.

(Q 6) Par ce qui précède, $(A-\lambda I_n)$ est inversible et la matrice $(A+\lambda I_n)$ aussi en posant $\lambda' = -\lambda \neq 0$. Par propriété, $(A-\lambda I_n)^{-1}$ est donc une matrice inversible et son inverse est $A-\lambda I_n$. **Par produit de matrices inversibles,** B est inversible et son inverse est :

$$B^{-1} = (A+\lambda I_n)^{-1}\Big((A-\lambda I_n)^{-1}\Big)^{-1} = (A+\lambda I_n)^{-1}(A-\lambda I_n)$$

⋆ ⋆ ⋆

FIN

⋆ ⋆ ⋆