Devoir surveillé n$^\text{o}$ $5 - partie 1$.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Petits exercices en vrac -

1. Donner une expression simple de (u_n) défini par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
2. Donner une expression simple de (u_n) défini par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. Soit (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   (b) Montrer par récurence que $\forall n \geq N$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$.
   (a) Quelle est la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
   (b) Soit $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n + \frac{1}{2^n n!}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) La suite $(v_n - u_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle ?
   (d) Montrer alors que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite.

Exercice 2

On considère la suite telle que : $U_{n+1} = \dfrac{1 + U_n}{2\sqrt{U_n}}$ et $U_0 = 2$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.
2. On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1 + x}{2\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f, en précisant les limites au bord du domaine de définition.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1$.
4. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

Exercice 3

A) Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$V_n = \frac{U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k, \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq U_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \dfrac{nV_n + U_n}{n+1}$, puis $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{n+1}$. En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.
3. (a) Justifier l'existence d'un majorant M de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \leq M$. En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ', avec $\ell' \leq \ell$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{2n} \geq \dfrac{U_n + V_n}{2}$. En déduire $\ell' = \ell$.

B) On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $-1 < u_n < 0$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{-1}{1+u_n}$.
   (b) Montrer alors que (U_n) converge vers une limite que l'on précisera.
   (c) Exprimer simplement $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$ en fonction de U_n, n et U_0, et à l'aide de **A)**, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$, cf. cours sur les suites arithmético-géométriques.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, cf. cours sur les suites récurrentes doubles.
3. (a) Posons $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Alors par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}$. De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ ce qui prouve que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   Au final, pour $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n}$ car $u_n > 0$.

   (b) • **Initialisation :** Pour $n = N$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = u_N$ donc la propriété est vraie au rang N.

   • **Hérédité :** Soit $n \geq N$ tel que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. On veut prouver alors que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N} u_N$.

   D'après la question précédente, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ car $n \geq N$. Or par hypothèse de récurrence : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. Ainsi, $\frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. Puisque $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$, on en déduit :

   $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-N} u_N$ ce qu'il fallait démontrer.

   Par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \geq N, u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N.}$

   (c) D'après l'inégalité de la question précédente et puisque $\forall n \in N,\ u_n > 0$ nous avons l'encadrement :

   $\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. Or $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$.

   Ainsi, par théorème d'encadrement on en déduit :

   $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$ par propriété des sommes téléscopiques. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc $\boxed{\text{croissante}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} - \frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^n(n+1)!} - \frac{1}{2^n n!}$$

   On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! \geq n!$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

   (c) $v_n - u_n = \frac{1}{2^n n!} \to \boxed{0}$.

   (d) **Par définition,** les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes et **par le théorème des suites adjacentes,** elles convergent vers la même limite.

Exercice 2:

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: « U_n est défini et $U_n > 0$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** $U_0 = 2 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Pour $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $U_n > 0$. Alors $2\sqrt{U_n}$ a un sens donc $\frac{1+U_n}{2\sqrt{U_n}}$ également ce qui prouve l'existence de U_{n+1}. De plus, puisque $U_n > 0$, alors $1 + U_n > 1 > 0$ et $3\sqrt{U_n} > 0$. Par conséquent $\frac{1+U_n}{2\sqrt{U_n}} > 0$. On en déduit $U_{n+1} > 0$ ce qui finit de prouver l'hérédité.

   Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, U_n > 0.}$
2. (a) La fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. f étant le produit de ces deux fonctions, $\boxed{f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$ Puis

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x}-\frac{1+x}{2\sqrt{x}}}{x}\ .$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2x-(1+x)}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \boxed{\frac{x-1}{4x^{\frac{3}{2}}}}$$

(b) • Puisque pour $x>0$, $4x^{\frac{3}{2}}>0$, nous avons $\boxed{f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1.}$

• Par opérations élémentaires, nous obtenons $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

• En écrivant : $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$, puis opérations élémentaires, nous obtenons $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

• On déduit des trois points précédents le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $U_n \geq 1$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** $U_0 = 2 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Pour $n\geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $U_n\geq 1$. La fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$. Donc $f(U_n)\geq f(1)$. Comme $f(1)=1$ et $f(U_n) = U_{n+1}$, $U_{n+1}\geq 1$. Donc la propriété est héréditaire.

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\geq 0, U_n \geq 1.}$

4.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $U_{n+1}\leq U_n$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** $U_0 = 2, U_1 = f(U_0) = \dfrac{1+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. Or $\dfrac{3}{2}\leq 2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$. Donc $U_1\leq 2$ et $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Pour $n\geq 0$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire $U_{n+1}\leq U_n$. La fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\geq 1$. Donc $f(U_{n+1})\leq f(U_n)$. Ainsi, $U_{n+2}\leq U_{n+1}$. Donc la propriété est héréditaire.

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\geq 0, U_{n+1}\leq U_n \text{ et la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

5. • On sait que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante par la question 4 et est minorée par 1 d'après la question 3. Elle converge donc vers un réel $\ell\geq 1$.

• Puisque f est continue et que $f(U_n) = U_{n+1}$, on sait que $f(\ell)=\ell$. Nous sommes amenés à résoudre l'équation suivante : $\dfrac{1+\ell}{2\sqrt{\ell}} = \ell \Leftrightarrow 1+\ell = 2\ell\sqrt{\ell}$. Posons $L=\sqrt{\ell}$. On doit alors résoudre l'équation : $1+L^2 = 2L^3 \Leftrightarrow 2L^3-L^2-1 = 0$. Une racine évidente est 1. En faisant la division euclidienne de $2L^3-L^2-1$ par $L-1$, on obtient : $2L^3-L^2-1 = (L-1)(2L^2+L+1)$. Le polynôme $2L^2+L+1$ n'a pas de racine réelle. Par conséquent 1 est la seule racine de $2L^3-L^2-1$. Finalement, l'équation $f(\ell)=\ell$ a une unique solution qui est $\ell = 1$.

• BILAN :

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$$

Exercice 3:

A)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $V_n = \dfrac{U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}}{n}$. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on sait que pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}, U_k \leq U_n$. Par conséquent, $V_n \leq \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} U_n}{n} = U_n$.

   Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, V_n \leq U_n.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\sum_{k=0}^{n-1} U_k = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} = nV_n$. Donc $V_{n+1} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n+1} = \dfrac{nV_n + U_n}{n+1}$.

   On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = \dfrac{nV_n + U_n}{n+1}.}$

   En utilisant ce qui précède,

$$V_{n+1} - V_n = \frac{nV_n + U_n - (n+1)V_n}{n+1} = \frac{U_n - V_n}{n+1}$$

   On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{n+1}.}$

   Finalement, par la première question, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \leq U_n$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} - V_n \geq 0$, soit $V_{n+1} \geq V_n$.

   On a donc montré que $\boxed{\text{la suite } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

3. (a) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un réel. Elle est donc majorée.

   $\boxed{\text{Ainsi, il existe un majorant } M \text{ de la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}}.}$

   (b) Par la question 1, on sait que $\forall n > 0, V_n \leq U_n$. Par la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$. Il est donc immédiat que :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n \leq M.}$

   La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée et est croissante par la question 2 .

   $\boxed{\text{La suite } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers un réel } \ell'.}$

   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n \leq U_n$, on en déduit en passant à la limite dans l'inégalité que

   $\boxed{\ell' \leq \ell}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $V_{2n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{2n-1} U_k}{2n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} U_k + \sum_{k=n}^{2n-1} U_k}{2n} = \dfrac{nV_n + \sum_{k=n}^{2n-1} U_k}{2n}$ par définition de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on sait que $\forall k \in \{n, \cdots, 2n-1\},\ U_k \geq U_n$. Par conséquent, $\sum_{k=n}^{2n-1} U_k \geq \sum_{k=n}^{2n-1} U_n = nU_n$. Finalement, $V_{2n} \geq \dfrac{nV_n + nU_n}{2n} = \dfrac{V_n + U_n}{2}$.

   $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, V_{2n} \geq \dfrac{U_n + V_n}{2}.}$

   Passons à la limite dans l'inégalité précédente : $\ell' \geq \dfrac{\ell' + \ell}{2} \Leftrightarrow \ell' \geq \ell$. Mais nous avons aussi $\ell' \leq \ell$ par la question 3b.

   Ainsi $\boxed{l' = l.}$

B) On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n^2 \geq 0, u_{n+1} \geq u_n$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $-1 < u_n < 0.$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** puisque $u_0 = -\frac{1}{2}, \mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Pour $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire $-1 < u_n < 0$. Dressons le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto x + x^2$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Par $\mathcal{P}(n), u_n \in]-1,0[$. Donc $u_{n+1} = g(u_n) \in]-\frac{1}{4},0[\subset]-1,0[$. Ainsi la propriété est héréditaire.

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, -1 < u_n < 0.}$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et minorée par -1. $\boxed{\text{Elle converge donc vers un réel } l.}$ En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, le nombre l satisfait l'équation suivante : $l = l + l^2$ qui est équivalente à $l^2 = 0$ soit $l = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

4. On pose : $U_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) $U_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{(u_n + u_n^2)u_n} = \dfrac{-1}{1+u_n}$.

   Ainsi $\boxed{U_n = \dfrac{-1}{1+u_n}.}$

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et appartient à $]-1,0[$ et la fonction $h : x \mapsto \dfrac{-1}{1+x}$ est croissante sur $]-1,0[$. Puisque $U_n = h(u_n)$, on en déduit que $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
   Enfin, la fonction h est continue sur $]-1,0]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $h(0) = -1$.

   $$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente vers } -1.}$$

   (c) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers -1. Par **A)**, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers -1.

   Or : $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_{k+1}} - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}\right)$

   $= \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k} - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}\right) = \dfrac{1}{nu_n} + \dfrac{2}{n}.$

   Donc la suite $(\dfrac{1}{nu_n} + \dfrac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1. Puisque $(\dfrac{2}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, on en déduit que $(\dfrac{1}{nu_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers -1 et ainsi :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = -1.}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆