Devoir surveillé n° 4.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

- Petits exercices en vrac -

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^{i-j}$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{3k+1}$.
3. Donner une expression simple de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$.
4. Étudier l'injectivité, la surjectivité de $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $f(n)=2n+1$.
5. (a) Montrer que la composition d'applications injectives est injective.
   (b) Montrer que la composition d'applications surjectives est surjective.

Exercice 2

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}x)$ et $g(x)=\arctan\left(\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$.
2. Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g que l'on appellera D dans la suite.
3. Justifier les inégalités : $\forall x\in D, -\dfrac{\pi}{4}<f(x)<\dfrac{\pi}{4}$ et $\forall x\in D, -\dfrac{\pi}{4}<g(x)<\dfrac{\pi}{4}$.
4. **Une première façon de prouver que $f=g$.**
   (a) Préciser les points où f est dérivable et donner une expression simplifiée de f'. Cette expression ne devra faire intervenir que la fonction ch.
   (b) Faire de même avec la fonction g. On détaillera bien le calcul effectué.
   (c) En déduire que $f=g$ sur un intervalle à préciser.
5. **Une autre façon de prouver l'égalité entre f et g.**
   (a) Rappeler et démontrer la relation entre $\tan(2a)$ et $\tan(a)$.
   (b) Justifier l'existence des expressions $\tan(2f(x))$ et $\tan(2g(x))$ puis simplifier ces-dernières. En déduire que $f=g$.
6. **Une application de l'égalité entre f et g .**
   (a) Donner une expression simple de $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$ et de $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$. (simple voulant dire qui ne fait intervenir que les 4 opérations élémentaires et la fonction $\sqrt{\ }$)
   (b) En écrivant $f\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$, la tangente de quel angle peut-on en déduire ?

Problème 1

On considère l'équation différentielle (E) $x(x-1)y' + \left(x - \frac{1}{2}\right) y = 1$, et on note ($\mathrm{E_H}$) l'équation homogène associée à (E).

A) Résolution de l'équation homogène.

A-1) Résoudre ($\mathrm{E_H}$) sur $I_1 =]-\infty;\ 0[$.

A-2) Résoudre ($\mathrm{E_H}$) sur $I_2 =]0;\ 1[$.

A-3) Résoudre ($\mathrm{E_H}$) sur $I_3 =]1;\ +\infty[$.

B) Résolution de (E) sur I_2.

B-1) Donner le domaine de définition, le domaine de dérivablilité et l'expression de la dérivée de la fonction Arcsin.

B-2) Pour $x \in I_2$, on pose $u(x) = \sqrt{x}$. Calculer $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$. En déduire une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur I_2.

B-3) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sur I_2. On exprimera cette solution avec des fonctions usuelles.

B-4) En déduire toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I_2.

C) Préliminaire avant de poursuivre l'étude.

C-1) (a) Montrer que la restriction de ch à l'intervalle $[0;\ +\infty[$ induit une bijection vers un ensemble que l'on précisera. *On notera dorénavant* argch *l' aplication réciproque associée.*

(b) Sans déterminer une expression simple de $\mathrm{argch}(x)$, vérifier que argch est dérivable sur un intervalle I que l'on précisera, et que $\forall x \in I,\ \mathrm{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

C-2) (a) Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et donner une expression simple de son application réciproque associée, que l'on notera argsh.

(b) Vérifier que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

D) Résolution de (E) sur I_1 et I_3.

D-1) Pour $x \in I_3$, on pose : $u(x) = \sqrt{x}$. Calculer $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2-1}}$. En déduire, à l'aide de C(1)b, une solution particulière de l'équation (E) sur I_3, puis toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I_3.

D-2) Pour $x \in I_1$, on pose : $v(x) = \sqrt{-x}$. Calculer $\dfrac{v'(x)}{\sqrt{v(x)^2+1}}$. En déduire, à l'aide de C(2)b, une solution particulière de l'équation (E) sur I_1, puis toutes les solutions de (E) sur l'intervalle I_1.

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,dt$.

A) Calcul explicite de I_n.

A-1) Calculer I_0 et I_1.

A-2) Calculer simplement : $\displaystyle\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)(t-t^2)^n\,dt$. En déduire, en remarquant que $(t-t^2)^n = t^n(1-t)^n$: $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt = \frac{1}{2}I_n$.

A-3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt$.

A-4) Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt - \int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt = I_{n+1}$ et en vous aidant des questions précédentes, en déduire la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)}I_n$, puis calculer I_3 et I_4.

A-5) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $I_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

B) Deux applications.

B-1) En vous aidant de la formule du binôme de Newton, en conclure : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

B-2) (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt + \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt$.

(b) Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$.

(c) On pose : $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt$. Montrer que pour tout $t \in [0;\ 1]$, $(t(1-t))^n \leq \dfrac{1}{4^n}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq R_n \leq \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9 \times 4^{n+1}}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$.

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$.

C) Lien avec J_n.

C-1) Calculer J_0, J_1 et J_2.

C-2) Montrer, à l'aide du changement de variable : $t = \pi - u$, que : $J_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)^n\,dt$.

C-3) En partant de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et à l'aide du changement de variable : $t = \cos^2(u)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u)^{2n+1}\,du$$

C-4) En déduire, en posant : $v = 2u$ que : $I_n = \dfrac{1}{4^n}J_{2n+1}$.

⋆⋆⋆
FIN
⋆⋆⋆

Exercice 1:

1. Par propriétés des sommes triangulaires :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^{i-j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 2^{i-j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{i=1}^{j} 2^{i}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\left(\sum_{i=0}^{j} 2^{i}-1\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\left(2^{j+1}-1-1\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}2-2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= 2n-2\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j-1\right)\\ &= 2n-2\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1}+2\\ &= 2n+\frac{4}{2^{n+1}}-4+2\\ &= \boxed{2n+\frac{1}{2^{n-1}}-2.}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}3^{2k+1} &= 3\sum_{k=1}^{n}9^k\\ &= 3\left(\sum_{k=0}^{n}9^k-1\right)\\ &= 3\left(\frac{9^{n+1}-1}{9-1}-1\right)\\ &= \boxed{\frac{27}{8}.\left(9^n-1\right).}\end{aligned}$$

3. Par linéarité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$. Or, par glissement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$. Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}=$ $\boxed{\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.}$
4. Soit : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définies par $f(n)=2n+1$.
   Si $f(n)=f(m)$, alors : $2n+1=2m+1\Leftrightarrow m=n$. Ainsi, f est injective. Pour ce qui est de la surjectivité, on constate que 0 n'a pas d'antécédents puisque l'équation $2n+1=0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$. Ainsi, f n'est pas surjective.
5. (a) Cf. cours.
   (b) Cf. cours.

Exercice 2:

1. $\boxed{\text{ch}^2x-\text{sh}^2x=1}$ cf cours.
2. sh est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$
   ch est aussi définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $1+\text{ch}x>0$, donc $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$
3. • Puisque : $\forall y\in\mathbb{R},-\frac{\pi}{2}<\text{Arctan}(y)<\frac{\pi}{2}$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R},-\frac{\pi}{2}<\text{Arctan}(\text{sh}(x))<\frac{\pi}{2}$, d'où en multipliant par $\frac{1}{2}$: $\forall x\in\mathbb{R},-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}\text{Arctan}(\text{sh}(x))<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\boxed{-\frac{\pi}{4}<f(x)<\frac{\pi}{4}.}$
   • $-1<\dfrac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}<1\Leftrightarrow -1-\text{ch}(x)<\text{sh}(x)<1+\text{ch}(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sh}(x)-\text{ch}(x)<1\\ \text{ch}(x)+\text{sh}(x)>-1\end{cases}.$
   Or $\text{ch}(x)+\text{sh}(x)=e^x$ et $\forall x\in\mathbb{R},e^x>0>-1$ ce qui prouve la deuxième inégalité. De même, $\text{sh}(x)-\text{ch}(x)=-e^{-x}$ ce qui prouve la deuxième inégalité. Par stricte croissance de la fonction Arctan, nous en déduisons : $\text{Arctan}(-1)<g(x)<\text{Arctan}(1)\Leftrightarrow$ $\boxed{-\frac{\pi}{4}<g(x)<\frac{\pi}{4}.}$

4. (a) Les fonctions sh et $\arctan$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(x)\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(x)\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \quad \text{en utilisant 1}$$

Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\mathrm{ch}x}}$$

(b) On a ch et sh dérivables sur $\mathbb{R}$ et comme le dénominateur ne s'annule pas $x \to \dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = \frac{\dfrac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}x) - \mathrm{sh}^2 x}{(1+\mathrm{ch}x)^2}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{1+\mathrm{ch}x}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)^2}$$
$$= \frac{(1+\mathrm{ch}x)^2\dfrac{1}{1+\mathrm{ch}x}}{(1+\mathrm{ch}x)^2+\mathrm{sh}^2 x} = \frac{1+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}^2 x + 2\mathrm{ch}x + 1 + \mathrm{sh}^2 x}$$
$$= \frac{1+\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}^2 x + 2\mathrm{ch}x + 1 + (\mathrm{ch}^2 x - 1)} = \frac{1+\mathrm{ch}x}{2\mathrm{ch}^2 x + 2\mathrm{ch}x}$$

Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\mathrm{ch}x} = f'(x)}$$

(c) La fonction $f-g$ est dérivable sur <u>l'intervalle $\mathbb{R}$</u> et sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que c'est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$(f-g)(0) = \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(0)) - \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(0)}{1+\mathrm{ch}(0)}\right) = \frac{1}{2}\arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

Donc $f-g$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{f = g \text{ sur l'intervalle } \mathbb{R}}$

5. (a) $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, cf. cours.

(b) D'après 3, $-\dfrac{\pi}{2} < 2g(x) < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\tan(2g(x))$ a un sens. De même, $-\dfrac{\pi}{4} < f(x) < \dfrac{\pi}{4}$, donc $-\dfrac{\pi}{2} < 2f(x) < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que $\tan(f(x))$ est également défini.

- Par propriété des fonctions réciproques, $\tan(2f(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
- D'après la formule ci-dessus ainsi que par la propriété des fonctions réciproques,

$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}}{1-\dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 - \mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{2(1+\mathrm{ch}(x))} \text{ car } \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x) = 1 \\
&= \mathrm{sh}(x).
\end{aligned}$$

- Ainsi : $\tan(2f(x)) = \tan(2f(x)) \Leftrightarrow 2f(x) = 2g(x)\ [\pi] \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, d'après 3, nous savons que $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent tous deux à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right[$ qui est de longueur $\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent : $f(x) = g(x)\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{f = g}$.

6. (a) On a

$$\boxed{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)} = \mathrm{ch}\left(\ln\sqrt{3}\right) = \frac{e^{\ln\sqrt{3}} + e^{-\ln\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

et comme $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right) + \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln 3\right) = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, on en déduit

$$\boxed{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(b) Calculons

$$f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Puis

$$g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$$

De $f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = g\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ on déduit donc

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$$

d'où en composant avec $\tan$ et en sachant que $\tan\circ\arctan = id$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, on a

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+2}}$$

Problème 1 :

A) Pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \{0;\ 1\}$, $x(x-1)y' + \left(x-\frac{1}{2}\right)y = 0 \Leftrightarrow y' + \dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x}y = 0$. Nous calculons alors $\displaystyle\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$, avec $u(x) = x^2-x$. Ainsi, $A(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| = 2\ln|x^2-x|$, donc : $S_H = \left\{Ce^{-\frac{1}{2}\ln|x^2-x|},\ C\in\mathbb{R}\right\}$. Par ailleurs, pour $A \geq 0$, $e^{-\frac{1}{2}A} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{A}}} = \dfrac{1}{e^{ln(\sqrt{(A)})}} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, ce qui donne : $S_H = \left\{C\dfrac{1}{\sqrt{|x^2-x|}},\ C\in\mathbb{R}\right\}$. On finit les simplifications suivant le signe du trinôme x^2-x (qui a pour racines 0 et 1) :

A-1) Sur $I_1 =]-\infty;\ 0[$, $x^2-x > 0$ donc $|x^2-x| = x^2-x$. Par conséquent : $\boxed{S_H = \left\{C\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$

A-2) Sur $I_2 =]0;\ 1[$, $x^2-x >< 0$ donc $|x^2-x| = x-x^2$. Par conséquent : $\boxed{S_H = \left\{C\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$

A-3) Sur $I_3 =]1;\ +\infty[$, $x^2-x > 0$ donc $|x^2-x| = x^2-x$. Par conséquent : $\boxed{S_H = \left\{C\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}},\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$

B) **B-1)** Arcsin est définie sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et pour tout $x\in]-1;\ 1[$, $\mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

B-2)

$$\begin{aligned}\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.}\end{aligned}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ a pour primitive : $\mathrm{Arcsin}(u(x)) = \mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})$. Nous en déduisons, en multipliant l'égalité précédente par 2, qu'une primitive de $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}}$ est $\boxed{2\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}).}$

B-3) Sur I_2, $S_H = \left\{C\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}},\ C\in\mathbb{R}\right\}$. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = C(x)\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. Alors : $y_P'(x) = C'(x)\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} + C(x)\dfrac{-\frac{1-2x}{2}}{\sqrt{x-x^2}(x-x^2)}$ car la dérivée d'une fonction de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est égale à $-\dfrac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u(x)}}$. En simplifiant, nous obtenons : $y_P'(x) = C'(x)\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} + C(x)\dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x-x^2}(x-x^2)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}x(x-1)y_P'(x) + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)y_P = 1 \quad &\Leftrightarrow x(x-1)C'(x)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - C(x)\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\\ &\quad +C(x)\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x-x^2}} = 1 \quad \text{car } x(x-1) = x^2-x\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-x^2}C'(x) = -1\\ &\Leftrightarrow C'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, nous en déduisons : $C(x) = -2\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})$ donc :

$$\boxed{y_P(x) = \frac{-2\text{Arcsin}(\sqrt{x})}{\sqrt{x-x^2}}.}$$

B-4) $S = y_P + S_H$, donc : $\boxed{S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \left(C - 2\text{Arcsin}(\sqrt{x}) \right),\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$

C) On note ci-dessous : $f = \text{ch}$ et $g = \text{sh}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 &\Leftrightarrow g(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \\
&\Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0 \\
&\Leftrightarrow e^x > e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln(e^{-x}) \quad \text{car } \ln \text{ est strictement croissante} \\
&\Leftrightarrow x > -x \\
&\Leftrightarrow 2x > 0 \\
&\Leftrightarrow x > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, sur $[0;\ +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'une fois en 0, ce qui prouve que f est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$.

Elle induit donc une bijection de $[0;\ +\infty[$ vers $f([0;\ +\infty[)$.

Or f est continue sur $[0;\ +\infty[$, donc $f([0;\ +\infty[) = [f(0);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$. Par opérations élémentaires, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 1$ donc f induit une bijection de $[0;\ +\infty[$ vers $[1;\ +\infty[$. On note argch son application réciproque assiociée, définie sur $[1;\ +\infty[$.

(a) Sur $[0\ :\ +\infty[$, la courbe représentative de f admet unetangente horizontale en 0, ce qui correspond (par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$) à une tangente verticale pour la courbe représentative de argch en 1. Bref, argch est dérivable sur $I =]1;\ +\infty[$, et nous savons que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\text{argch}'(x) &= \frac{1}{f'(\text{argch}(x))} \\
&= \frac{1}{g(\text{argch}(x))}
\end{aligned}$$

Or $f^2(y) - g^2(y) = 1 \Leftrightarrow g^2(y) = f^2(y) - 1$. On en déduit, pour $y \in [0;\ +\infty[$, $g(y) = \sqrt{f^2(y) - 1}$ car si $y \geq 0$, alors $g(y) \geq 0$ et $f^2(y) - 1 > 0$. Ceci donne donc en posant $y = \text{argch}(x) \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\text{argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{(f(\text{argch}(x))^2 - 1}} \\
&= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.} \quad \text{car } f(\text{argch}(x)) = x.
\end{aligned}$$

C-1) (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
$g(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y$. On pose alors $X = e^{-x}$. L'équation devient alors : $X - \frac{1}{X} = 2y$ car $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, ce qui s'écrit encore : $\frac{X^2 - 2yX - 1}{4} = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$.

Nous reconnaisons alors un trinôme de discriminant$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$. Ceci est toujours positif, et par propriété de la racine : $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{y^2+1}$. Nous en déduisons deux racines réelles distinctes : $X_1 = y - \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$.

Ainsi : $g(x) = y \Leftrightarrow e^x = y - \sqrt{y^2+1}$ ou $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. Or la première équation n'admet pas de solutions puisque pour tout réel y, $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. D'autre part, $e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Ceci prouve que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Par opérations élementaires, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Ainsi, par composition de fonctions dérivables, g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
(g^{-1})'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+1}}{\sqrt{x^2+1}\cancel{(1+\sqrt{x^2+1})}} \\
&= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}
\end{aligned}
$$

D) D-1)

$$
\begin{aligned}
\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2-1}} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}} \\
&= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}.}
\end{aligned}
$$

Sur I_3, $S_H = \left\{ C\frac{1}{\sqrt{x^2-x}},\ C \in \mathbb{R} \right\}$. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = C(x)\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$. Alors : $y'_P(x) = C'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} + C(x)\frac{-\frac{2x-1}{2}}{\sqrt{x^2-x}(x-x^2)}$ car la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{\sqrt{u}}$ est égale à $-\frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u(x)}}$. En simplifiant, nous obtenons : $y'_P(x) = C'(x)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} + C(x)\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}(x^2-x)}$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
x(x-1)y'_P(x) + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)y_P(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow x(x-1)C'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2(x}} - C(x)\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}} \\
&\quad + C(x)\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x}} = 1 \quad \text{car } x(x-1) = x^2-x \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x}C'(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}
\end{aligned}
$$

Or $\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$, avec $u(x) = \sqrt{x}$. Donc $C(x) = 2\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = 2\mathrm{argch}(u(x)) = 2\mathrm{argch}(\sqrt{x})$ d'après C(0)b. Ainsi : $\boxed{y_P(x) = \frac{2\mathrm{argch}(\sqrt{x})}{\sqrt{x^2-x}}}$, donc :

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\left(C + 2\mathrm{argch}(\sqrt{x})\right),\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

D-2)

$$
\begin{aligned}
\frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)^2+1}} &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x+1}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{-x+1}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{-x(-x+1)}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x^2-x}}.
\end{aligned}
$$

Sur I_1, $S_H = \left\{ C\frac{1}{\sqrt{x^2-x}},\ C \in \mathbb{R} \right\}$. Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = C(x)\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$. Alors, en reprenant les calculs précédents, nous en déduisons de la même façon :

$$x(x-1)y'_P(x) + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)y_P = 1 \quad \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$$

Or, $\frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = -2\frac{v'(x)}{\sqrt{v^2(x)-1}}$, avec $v(x) = \sqrt{-x}$. Donc $C(x) = 2\int \frac{v'(x)}{\sqrt{v^2(x)+1}}\,dx = -2\mathrm{argch}(u(x)) = 2g(\sqrt{x}) = -2\ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-x+1})$ d'après C(0)b. Ainsi : $\boxed{y_P(x) = \frac{-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-x+1})}{\sqrt{x^2-x}}}$, donc :

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\left(C - 2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-x+1})\right),\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Problème 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,dt$.

A) Calcul explicite de I_n.

A-1) $I_0 = \int_0^1 1\,dt = 1$ et $I_1 = \int_0^1 t(1-t)\,dt = \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}.}$

A-2) Posons : $u(t) = t - t^2$. Alors : $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t-t^2)^n\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(t)u(t)^n\,dt.$

Ainsi, $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(t-t^2)^n\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}u(t)^{n+1}\right]_0^1 = 0.$

Or, $(t-t^2)^n = t^n(1-t)^n$ donc : $0 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)t^n(1-t)^n\,dt = \int_0^1 tt^n(1-t)^n\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ par linéarité.

Ainsi : $\int_0^1 tt^n(1-t)^n\,dt = \frac{1}{2}I_n \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt = \frac{1}{2}I_n.}$

A-3) Soit $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}\,dt$. Posons : $u(t) = \frac{t^{n+2}}{n+2}$ et $v(t) = (1-t)^{n+1}$. u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[0;\ 1]$ et $\forall t \in [0;\ 1], u'(t) = t^{n+1}$, $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$. Par intégrations par parties : $\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt \Leftrightarrow I_{n+1} = 0 + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{n+2}\times(n+1)(1-t)^n\,dt$. Par conséquent :

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt.}$$

A-4) Puisque : $(1-t)^{n+1} = (1-t)^n(1-t)$ et par linéarité, on en déduit : $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n(1-t)\,dt = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt - \int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt.$

Or, $\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt = \frac{1}{2}I_n$ et $I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt$ d'après ci-dessus.

On en déduit : $I_{n+1} = \frac{1}{2}I_n - \frac{n+2}{n+1}I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1}\left(1 + \frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{2}I_n$. Au final, après simplifications, nous avons : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}I_n.}$

Alors : $I_2 = \frac{2}{10}I_1 = \frac{1}{30}$, $I_3 = \frac{3}{14}\times\frac{1}{30} = \frac{1}{140}$ et $I_4 = \frac{4}{2\times 9}\frac{1}{140} = \frac{1}{630}$.

A-5) Posons : $\mathcal{P}(n)$: « $I_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ »et montrons par récurrence faible sur $\mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = 1$ et $I_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. Montrons qu'alors : $I_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}$.

  Or, d'aprs A4, $I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}I_n$. Ainsi, en injectant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :
  $I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}\frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. Or :

  $$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{2n!}{n!n!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

  Ainsi, $I_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}\times\frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{2n+3}\binom{2n+2}{n+1}$,

  ce qu'il fallait démontrer.

D'où le résultat par récurrence.

B) Deux applications.

B-1) Nous savons d'après la partie précédente que : $\frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = I_n$. Il nous faut donc estimer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

Or, d'après la formule du binôme de Newton : $(1-t)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k \binom{n}{k}$.

Ainsi : $t^n(1-t)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} t^{n+k}$, d'où par linéarité de l'intégrale :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k\binom{n}{k} t^{n+k}\,dt = (-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n+k}\,dt.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 t^{n+k}\,dt = \left[\frac{1}{n+k+1}t^{n+k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+k+1}$. Au final, nous en déduisons :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.}$$

B-2) (a) Par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k\right)dt$.

Or : $\forall t\in[0;\ 1], t(1-t)\neq 1$ et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k = \sum_{k=0}^{n}(t(1-t))^k = \frac{1-(t(1-t))^{n+1}}{1-t(1-t)}$.

Ainsi, toujours par linéarité de l'intégrale :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{1-t(1-t)}\,dt - \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{1-t(1-t)}\,dt$, ce qui donne en développant : $1-t(1-t)=t^2-t+1$, la relation :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt + \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt.}$$

(b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}\,dt$. On pose donc : $x = t-\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = x+\frac{1}{2}$.

Pour $t_0 = 0$, nous avons $x_0 = -\frac{1}{2}$ et pour $t_1 = 1$ nous avons : $x_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi, φ d'expression $\varphi(x) = x+\frac{1}{2}$ est définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ et est de classe C^1 sur cet intervalle, avec de plus : $\forall x\in I,\ \varphi'(x) = 1$. En appliquant la formule de changement de variable, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.} \end{aligned}$$

(c) Soit : $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt$.

Le trinôme $t(1-t)$ a un maximum en $\dfrac{1}{2}$, pour lequel elle prend la valeur $\dfrac{1}{4}$. Ainsi : $\forall t\in[0;\ 1], t(1-t)\leq\frac{1}{4}$. De plus, $\forall t\in[0;\ 1],\ t(1-t)\geq 0$, donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t\in[0;\ 1], 0\leq(t(1-t))^n\leq\frac{1}{4^n}.}$$

Alors, pour tout $t\in[0;\ 1]$, $0 \leq \dfrac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1} \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}\dfrac{1}{t^2-t+1}$ car $\forall t\in[0;\ 1],\ t^2-t+1>0$. Par croissance de l'intégrale :

Par croissance de l'intégrale, $0\leq R_n\leq \dfrac{1}{4^{n+1}}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2-t+1}\,dt$. Enfin, d'après la question précédente :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$, d'où finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}, 0\leq R_n\leq\frac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}}}$$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_n = 0.}$ par théorème d'encadrement et car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}} = 0$ par opérations usuelles.

(d) D'après précédemment, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + R_n$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.}$$

C) Lien avec J_n.

C-1) $J_0=\int_0^{\pi/2}1\,dt=\frac{\pi}{2}$, $J_1=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,dt=[[-\cos(t)]_0^{\pi/2}=1$.

$J_2=\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos(2t))}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}1\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,dt\right)=\frac{\pi}{4}-[\frac{1}{2}\sin(2t)]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

C-2) Partons de $J_n=\int_0^{\pi/2}\sin(t)^n\,dt$ et réalisons le changement de variable : $t=\pi-u\Leftrightarrow u=t-\pi$. Pour $t_0=0$, $u_0=\pi$ et pour $t_1=\frac{\pi}{2}$, $u_1=\frac{\pi}{2}$. On définit ainsi une fonction φ sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, d'expression $\varphi(u)=\pi-u$. Cette fonction est par ailleurs de classe C^1 sur I et $\forall u\in I,\ \varphi'(u)=-1$. La formule de changement de variable donne alors : $J_n=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi-u)^n(-du)=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(\pi-u)^n\,du$. Enfin, $\forall u\in\mathbb{R},\ \sin(\pi-u)=\sin(u)$, d'où finalement : $\boxed{J_n=\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(u)^n n\,du.}$

C-3) Partons de $I_n=\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et posons : $t=\cos^2(u)$. Pour $t_0=0$, $u_0=\frac{\pi}{2}$ convient et pour $t_1=\frac{\pi}{2}$, $u_1=0$ convient également. On définit ainsi une fonction : φ d'expression $\varphi(u)=\cos^2(u)$ définie sur $I=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et de classe C^1 sur I. De plus : $\forall u\in I,\ \varphi'(u)=-2\cos(u)\sin(u)$. Ainsi, par changement de variable :

$I_n=\int_{\pi/2}^{0}(\cos^2(u))^n(1-\cos^2(u))^n(-2\cos(u)\sin(u))\,du=\int_0^{\pi/2}\cos(u)^{2n}\sin(u)^{2n}\sin(2u)\,du.$

Enfin, $\cos(u)^{2n}\sin(u)^{2n}=(\cos(u)\sin(2u))^{2n}=\left(\frac{1}{2}\sin(2u)\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\sin(2u)^{2n}=\frac{1}{4^n}\sin(2u)^{2n}$. Par conséquent, nous en déduisons :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\,du.}$$

C-4) Partons de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\,du$ et posons $v=2u\Leftrightarrow u=\frac{v}{2}$. Pour $u_0=0$, $v_0=0$ et pour $u_1=\frac{\pi}{2}$, $v_1=\pi$. On définit ainsi une fonction φ sur $[0;\ \pi]$ d'expression : $\varphi(v)=\frac{v}{2}$. Cette dernière est même de classe C^1 sur $[0;\ \pi]$ et $\forall v\in[0;\ \pi],\ \varphi'(v)=\frac{1}{2}$. Par changement de variable :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\,du=\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\frac{1}{2}\,dv=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv.$

On en déduit : $I_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv$.

Or : $\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv=\int_0^{\pi/2}\sin(v)^{2n+1}\,dv+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv$. De plus, $J_{2n+1}=\int_0^{\pi/2}\sin(v)^{2n+1}\,dv$ par définition de J_n et d'après C2, $\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv=J_{2n+1}$.

Ainsi, $\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv=2J_{2n+1}$ et donc :

$I_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\,dv=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}2J_{2n+1}$, ce qui donne bien au final :

$\boxed{I_n=\frac{1}{4^n}J_{2n+1}.}$

⋆⋆⋆

FIN

⋆⋆⋆