Devoir surveillé n° 3.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' - y = \mathrm{ch}(t)$; (b) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$; (c) $y'' + 9y = \cos(3t)$.

Exercice 2

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $2z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 1 + i\sqrt{3} = 0$.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation : $2z^6 - (\sqrt{3} + 3i)z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

Exercice 3

Pour $z \neq -3$, on pose : $Z = \dfrac{z + 1 - i}{z + 3}$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -3, $-1 + i$ et z.

1 On pose $z = a + ib$ avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1-(a) Exprimer en fonction de a et b la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

1-(b) En déduire l'ensemble des points M tels que Z est réelle.

2

2-(a) Donner une interprétation géométrique de $|z + 1 - i|$, $|z + 3|$ ainsi que d'un argument de Z.

2-(b) En déduire l'ensemble des points M tels que :

(a) $|Z| = 1$; (b) Z est un réel strictement négatif.

Problème

Une étude de fonction

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 9 + \dfrac{8}{x^2}\right) e^{1/x}$.

1. (a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$ (*on pourra poser :* $X = \dfrac{1}{x}$.)
   (b) Déterminer les limites aux bords du domaine de définition de f.
   (c) Calculer : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right)$. En déduire que f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation réduite.
2. (a) Montrer f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x + 2)(x + 1)(x^2 - 4x - 8)}{2x^4}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis en vous aidant de toutes les informations précédentes, tracer le plus précisément possible la courbe représentative de f.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

(a) $S = \left\{ Ce^t + \frac{t}{2}\exp(t) - \frac{\exp(-t)}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}$;

(b) $S = \left\{ \left(\lambda + \mu t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-2t}, (\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$;

(c) $S = \left\{ \lambda \cos(3t) + \left(\mu + \frac{t}{6}\sin(3t) \right), (\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 2:

1. On calcule $\Delta = (-(\sqrt{3}+3i))^2 - 8(-1+i\sqrt{3}) = 2(1-i\sqrt{3})$. On cherche alors w tel que $w^2 = 2(1-\sqrt{3}i)$. On posant $w = x+iy$ et en remarquant que $|2(1-i\sqrt{3})| = 4$, on aboutit au système :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ car } xy < 0.$$
On prend donc : $w = -\sqrt{3} + i$, ce qui donne pour solutions : $\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{4} = i}$, $\boxed{z_2 = \frac{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\pi/6}.}$
2. • On pose $Z = z^3$, ce qui nous ramène à l'équation de la question ci-dessus, on en déduit : $Z = e^{i\pi/6}$ ou $z = i$.
   • Pour résoudre l'équation $z^3 = e^{i\pi/6}$, on pose : $z = re^{i\theta}$. Alors :
$$z^3 = z_1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = e^{i\pi/6} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$
   Nous en déduisons les trois solutions : $\boxed{w_1 = e^{i\pi/18}, w_2 = e^{13i\pi/18}, w_3 = e^{25i\pi/18}.}$
   • De la même façon : $\boxed{z^3 = i \Leftrightarrow z = \underbrace{e^{i\pi/6}}_{=w_4} \text{ ou } z = \underbrace{e^{5i\pi/6}}_{w_5} \quad z = \underbrace{e^{9i\pi/6}}_{w_6}.}$ car $i = e^{i\pi/2}$
   • Finalement : $\boxed{S = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4;\ w_5;\ w_6\}.}$ (avec en fait : $w = e^{3i\pi/2} = -i$).

Exercice 3:

1 1-(a)
$$\begin{aligned} Z &= \frac{a+ib+1-i}{a+ib+3} \\ &= \frac{(a+1)+i(b-1)}{a+3+ib} \\ &= \frac{[(a+1)+i(b-1)][a+3-ib]}{(a+3+ib)(a+3-ib)} \\ &= \frac{(a+1)(a+3)+b(b-1)+i[(a+3)(b-1)-b(a+1)]}{(a+3)^2+b^2} \\ &= \boxed{\frac{a^2+4a+b^2-b+3}{(a+3)^2+b^2} + i\frac{-a+2b-3}{(a+3)^2+b^2}.} \end{aligned}$$

1-(b) D'après la question précédente, Z est réel si et seulement si $-a+2b-3=0 \Leftrightarrow b=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}$. On se rappelle que $z \neq -3$, on en déduit :
Z réel si et seulement si :
$\begin{cases} M \text{ appartient à la droite D d'équation réduite } y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ M \neq (-3;\ 0) \end{cases}$.
On vérifie que le point de coordonnées $(-3;\ 0)$ appartient bien à cette droite. On conclue :

$\boxed{Z \text{ imaginaire pur si et seulement si } M \text{ appartient à } D \text{ privé du point } (-3;\ 0).}$

2 2-(a) • Avec les notations de l'énoncé : $|Z|=\dfrac{|z+1-i|}{|z+3|}=\boxed{\dfrac{BM}{AM}.}$

• De même : $\boxed{\arg(Z)=(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{BM})\ [2\pi].}$

2-(b) (a) $|Z|=1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow AM=BM$. L'ensemble recherché est donc $\boxed{\text{la médiatrice du segment } [AB].}$

(b) Z est un réel strictement négatif si et seulement si $\arg(Z)=\pi\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{BM})=\pi\ [2\pi]$. Cette condition signifie que A, B et M sont alignés et que M est situé entre A et B. L'ensemble recherché est donc $\boxed{\text{le segment } [AB].}$

Problème 1:

1. (a) • On pose : $X=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{X}$. Alors : $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}=\dfrac{e^X}{\left(\frac{1}{X}\right)^2}=X^2e^X$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^-} X=-\infty$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x\to O^-}\dfrac{e^{1/x}}{x^2}=\lim\limits_{X\to-\infty}X^2e^X=0,}$ par croissances comparées.

• On pose : $X=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{X}$. Alors : $x\left(e^{1/x}-1\right)=\dfrac{1}{X}(e^X-1)=\dfrac{e^X-1}{X}$. De plus : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}X=0$, donc par changement de variables : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{1/x}-1\right)=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1.}$

(b) • Nous avons : $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}+9\right)e^{1/x}+8\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$. Or, par opérations élémentaires : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{2}+9\right)e^{1/x}=0$ puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/x}=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{1/x}}{x^2}=0$ d'après la question précédente. Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0.}$

• Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{1/x}=+\infty$, alors par opérations élémentaires $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty.}$

• Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=1$, par opérations élémentaires, $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty.}$

(c) Nous avons : $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x\left(e^{1/x}-1\right)+\left(9+\dfrac{8}{x^2}\right)e^{1/x}$. Or d'après 1., $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=1$ et par opérations élémentaires, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(9+\dfrac{8}{x^2}\right)e^{1/x}=9$. Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{19}{2}.}$

Nous en déduisons : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{19}{2}\right)\right)=0$, donc <u>la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation réduite : $y=\frac{x}{2}+\frac{19}{2}$.</u>

2. (a) Par composition, la fonction définie par $g(x)=e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$. Ainsi, par opérations élémentaires, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{16}{x^3}\right) e^{1/x} + \left(\tfrac{x}{2} + 9 + \tfrac{8}{x^2}\right) \frac{-e^{1/x}}{x^2} \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{16}{x^3} - \tfrac{1}{2x} - \tfrac{9}{x^2} - \tfrac{8}{x^4}\right) e^{1/x} \\ &= \frac{x^4 - 32x - x^3 - 18x^2 - 16}{2x^4} e^{1/x}.\end{aligned}$$

Il nous reste à remarquer que :

$$\begin{aligned}(x+2)(x+1)(x^2-4x-8) &= (x^2+3x+2)(x^2-4x-8) \\ &= x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x^3 - 12x^2 - 24x + 2x^2 - 8x - 16 \\ &= x^4 - x^3 - 32x - 16.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)}{2x^4}.}$

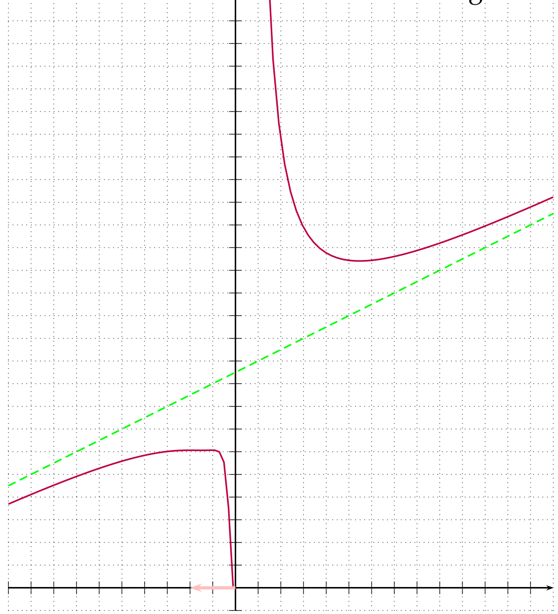
(b) L'expression $f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)$. Or, x^2-4x-8 a pour discriminant $48 = (4\sqrt{3})^2$. Ses racines sont donc : $x_1 = 2(1-\sqrt{3}) \approx -1.46$ et $x_2 = 2(1+\sqrt{3}) \approx 5.45$. Ce trinôme est donc positif à l'extérieur des racines. On obtient le signe du produit à l'aide du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x-8		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons donc le tableau de variations, les limites ayant été calculées précédemment :

x	$-\infty$		-2		x_1		-1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{10}{\sqrt{e}} \approx 6.06$	↘	≈ 6.05	↗	$\frac{33}{2e} \approx 6.07$	↘	0 || $+\infty$	↘	$\approx 14,41$	↗	$+\infty$

(c) Nous avons : $\dfrac{f(x)}{x} = \frac{e^{1/x}}{2} + (9x^2+8)\dfrac{e^{1/x}}{x^3}$. Or, toujours par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x^3} = 0$, donc par opérations élémentaires, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0.}$
Si nous posons : $f(0) = 0$ (vu que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$) alors, nous avons $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Le taux d'accroissement admet donc une limite nulle en 0^-. On en déduit donc une demi-tangente horizontale en 0^-.



Il est à noter les deux éléments non visibles à l'oeil nu sur le graphique à cause de l'échelle :

- Le changement du sens de variations de la courbe entre -2 et 0.
- Une demi-tangente horizontale en 0^-.