Devoir surveillé n^{o} 2.

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice 1

Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction d'expression : $f(x) = \sin^4(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

1. Justifier qu'il est possible de restreindre l'étude à $I = \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Étudier f sur I puis tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient $\alpha, \beta \in [0; \frac{\pi}{2}[$ tels que $\tan(\alpha) = \frac{1}{7}$ et $\tan(\beta) = 2$. On pose $x = \alpha + 2\beta$ et on souhaite trouver la valeur de x. On pose $A = 7 + i$ et $B = 1 + 2i$.

1. Donner la forme algébrique de $A \times B^2$ et en déduire sa forme exponentielle.
2. Pourquoi α est un argument de A et β un argument de B ?
3. En utilisant les formes exponentielles de A et de B, en déduire celle de $A \times B^2$.
4. Retrouver alors la valeur de x.

Exercice 3

1. Résoudre l'équation : $\sin(4x) = -\sin(x)$ (E).
2. Montrer que (E) $\Leftrightarrow \sin(x)\left(\cos(2x)\cos(x) + \dfrac{1}{4}\right) = 0$.
3. Délinéariser $\sin(4x)$ puis montrer que : $\sin(4x) + \sin(x) = \sin(x)(8\cos^3(x) - 4\cos(x) + 1)$.

   (*On pourra utiliser l'identité remarquable :* $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.)
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ sont solutions de l'équation : $8x^3 - 4x + 1 = 0$.
5. Résoudre cette dernière et en déduire : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
6. On pose : $w = e^{2i\pi/5}$. Calculer : $|w^{n+1} - w^n|$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 4

On se propose de résoudre l'inéquation : (E) $\sin(x) > -\cos(x)$ de deux manières différentes :

A) Première méthode :

A)-1 Énoncer et démontrer la factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$.

A)-2 Résoudre (E) en vous aidant de la question précédente.

B) Deuxième méthode :

B)-1 **Questions préliminaires.**

(a) Énoncer et démontrer l'expression de $\tan(x + y)$ en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$.

(b) En déduire l'expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ puis la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(c) Exprimer très simplement $\frac{3\pi}{8}$ en fonction de $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{8}$ et en déduire $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

B)-2 (a) Soit $x \in \mathbb{R} - \{\pi\ [2\pi]\}$. On pose : $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(b) Résoudre (E) en posant : $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Problème

Le but du problème est de proposer deux méthodes de calcul de $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

A- A-1 Résoudre l'équation $\tan(3x) = \tan(-2x)$.

A-2 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{6}\ \left[\dfrac{\pi}{3}\right]\right\}$, $\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$.

A-3 En déduire que $\alpha = \tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation :

$$X^4 - 10X^2 + 5 = 0.$$

A-4 Résoudre cette dernière et en déduire $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

B- Pour $z \in \mathbb{C}$ on note $P(z) = \dfrac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

B-1 (a) Soit z_0 une solution de $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{2i\pi/5}$. Montrer alors que $P(z_0) = 0$.

(b) Résoudre l'équation : $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{2i\pi/5}$.

(c) Montrer que pour $\theta \neq 0\ [2\pi]$: $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.

(d) Déduire des questions précédentes que : $\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)}$ est une solution de l'équation : $P(z) = 0$.

B-2 On utilisera dans cette question l'identité remarquable : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

(a) En développant P, vérifier qu'il peut s'écrire sous la forme $P(z) = az^4 + bz^2 + c$ avec a, b et c des réels que l'on calculera.

(b) Déterminer alors une autre écriture des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

(c) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et retrouver la valeur de $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ obtenue ci-dessus.

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1:

1. Puisque : $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, alors : $\sin(x+\pi)^4 = (-\sin(x))^4 = \sin^4(x)$. De plus : $\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(x)$. Par conséquent : $f(x+\pi) = f(x)$ ce qui prouve que f est π-périodique.

   Par ailleurs $\sin(-x)^4 = (-\sin(x))^4 = \sin^4(x)$ et $\cos(-2x) = \cos(2x)$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ donc que f est paire.

   Au final il suffit donc d'étudier f sur $I = \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. En effet :

   - On complètera le tracé obtenu sur I sur $\left[-\frac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ à l'aide de la parité, donc par symétrie par rapport à l'axe des ordonnés ;
   - On obtiendra alors le tracé sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la π-périodicité soit en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Par opération usuelles, f est dérivable sur I et :

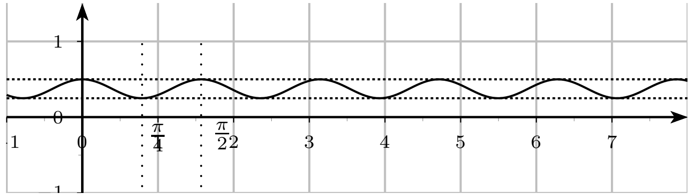
$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ \ f'(x) &= 4\sin^3(x)\cos(x) - \tfrac{1}{2}\times 2\sin(2x)\\ &= 4\sin^3(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\\ &= 2\sin(x)\cos(x)(2\sin^2(x)-1)\\ &= 4\sin(x)\cos(x)\left(\sin^2(x)-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= 4\sin(x)\cos(x)\left(\sin(x)-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin(x)+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

   Sur I, $\sin$ et $\cos$ sont positifs donc : $\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ également. De plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad & \sin(x) - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \quad .\\ \Leftrightarrow\quad & \sin(x) \geq \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \Leftrightarrow\quad & x \in \left[\tfrac{\pi}{4};\ \tfrac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	0	0
f	$\frac{1}{2}$ ↘	$\frac{1}{4}$	↗ $\frac{1}{2}$



Exercice 2:

1. La forme algébrique de $A \times B^2$ puis sa forme exponentielle sont :

$$A \times B^2 = (7+i)(-3+4i) = (-21-4) + i(28-3) = 25 \times \Big(-1+i\Big) = 25\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

2. Pourquoi α est un argument de A et β un argument de B ? Rappelons comment on trouve un argument θ d'un nombre complexe $z = a+ib$. On cherche θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

   ainsi $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.

   - Pour A, on a $\tan(\theta) = \frac{1}{7} = \tan(\alpha)$ par hypothèse et $\alpha \in [0; \pi/2[$. Or, puisque A a une partie réelle et imaginaire positives, on sait que $Arg(A) \in [0; \pi/2[[2\pi]$. Ainsi, α est un argument de A.

- ► Pour B, il en est de même : $\beta = Arg(B)[2\pi]$.

3. Par définition, $A = |A|e^{i\alpha} = \sqrt{50}e^{i\alpha}$ et $B = |B| = \sqrt{5}e^{i\beta}$. Ainsi,
$$A \times B^2 = \sqrt{50}e^{i\alpha} \times \left(\sqrt{5}e^{i\beta}\right)^2 = \sqrt{50} \times 5 \times e^{i[\alpha+2\beta]} = 25\sqrt{2}e^{i[\alpha+2\beta]}$$

4. On a donc
$$25\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 25\sqrt{2}e^{i[\alpha+2\beta]} \Leftrightarrow 3\pi/4 \equiv \alpha + 2\beta[2\pi]$$
Or $\alpha + 2\beta \in]\pi/2; \pi[$ et ainsi $\boxed{x = \alpha + 2\beta = \frac{3\pi}{4}}$.

Exercice 3:

1. $$\begin{aligned} \sin(4x) = -\sin(x) &\Leftrightarrow \sin(4x) = \sin(-x) \\ &\Leftrightarrow 4x = -x\ [2\pi] \text{ ou } 4x = \pi + x\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow 5x = 0\ [2\pi] \text{ ou } 3x = \pi\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = 0 \left[\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right].} \end{aligned}$$

2. La délinéarisation de $\sin(4x)$ donne (cf. cours) : $\sin(4x) = 4\cos(x)\sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \boxed{4\cos(x)\sin(x)(2\cos^2(x) - 1).}$ Ainsi : $\sin(4x) + \sin(x) = 4\cos(x)\sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 4\cos(x)\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) + \sin(x) = \boxed{\sin(x)(8\cos^3(x) - 4\cos(x) + 1).}$

3. D'après précédemment, $\frac{2\pi}{5}$ est solution de (E), donc $\sin\left(4 \times \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(8\cos^3\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1\right) = 0$. Puisque : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$, on en déduit que : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ est solution de } 8x^3 - 4x + 1 = 0.}$ De la même façon : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ est solution de } 8x^3 - 4x + 1 = 0}$ car $\frac{\pi}{3}$ est solution de (E).

4. D'après ci-dessus, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ est solution de $8x^3 - 4x + 1 = 0$. On factorise donc par $x - \frac{1}{2}$ à l'aide d'une division euclidienne ce qui nous donne : $8x^3 - 4x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 4x - 2) = (2x-1)(4x^2 + 2x - 1)$. Ainsi : $8x^3 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Nous avons donc un trinôme de discriminant $\Delta = 20 = (2\sqrt{5})^2$. Par conséquent : $4x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
Finalement :
$$\boxed{8x^3 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ ou } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$$

5. On en déduit donc : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$ ou $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Enfin, $\frac{2\pi}{5} \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et cos est strictement décroissante sur cet intervalle d'où $\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < 1$. Par conséquent, nous ne pouvons avoir : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$ ni $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ car $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$, ce qui prouve que : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$

6. On a : $|w^{n+1} - w^n| = |w^n(w-1)| = |w^n||w-1| = |w|^n|w-1|$. Or : $|w| = 1$ donc : $|w|^n = 1$. De plus : $|w-1| = |1 - e^{2i\pi/5}|$. Or : $1 - e^{2i\pi/5} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)e^{i\pi/5}$ donc : $|1 - e^{2i\pi/5}| = |-2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)e^{i\pi/5}| = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Pour finir : $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ce qui donne au final :

$$\boxed{|w^{n+1} - w^n| = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}.}$$

Exercice 4:

A) Première méthode :

A)-1 Voir le cours.

A)-2 Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sin(x) \geq -\cos(x) &\Leftrightarrow \sin(x)+\cos(x) \geq 0\\
&\Leftrightarrow \sin(x)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) \geq 0\\
&\Leftrightarrow \cos\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad \text{car } 2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) > 0\\
&\Leftrightarrow x-\tfrac{\pi}{4} \in \left[-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{4}+2k\pi;\ \tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{4}+2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}.$$

$\boxed{\text{Finalement : } S = \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]\ [2\pi].}$

B) Deuxième méthode :

B)-1 **Questions préliminaires.**

(a) On rappelle $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ (voir le cours pour la démonstration),

(b) ce qui donne en posant $a = b = x$ la formule de trigonométrie : $\boxed{\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.}$ Cette relation donne, pour $x = \frac{\pi}{8}$:

$$1 = \tan(\pi/4) = \frac{2\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)} \quad \begin{aligned}&\Leftrightarrow 1-\tan^2(\pi/8) = 2\tan(\pi/8)\\ &\Leftrightarrow \tan^2(\pi/8)+2\tan(\pi/8)-1 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\tan(\pi/8)$ est solution de l'équation : $x^2+2x-1 = 0$. C'est un trinôme : on calcule le discriminant : $\Delta = 8$. Puisque $\Delta > 0$, nous avons deux racines distinctes :

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} & \text{ou} & x_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2}\\ x_1 = -1+\sqrt{2} & \text{ou} & x_2 = -1-\sqrt{2}.\end{array}$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(\pi/8) > 0$. On en déduit : $\boxed{\tan(\pi/8) = -1+\sqrt{2}.}$

(c) Nous avons $\boxed{\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}}$, donc :

$$\begin{aligned}\tan(3\pi/8) &= \tan(\pi/2-\pi/8)\\ &= \frac{1}{\tan(\pi/8)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\ &= 1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\tan(3\pi/8) = 1+\sqrt{2}.}$

B)-2 (a) Soit $x \in \mathbb{R} - \{\pi\ [2\pi]\}$. On pose : $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Alors : $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. Or : $1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, donc : $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{1+t^2}$ car $1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. On en déduit :

$$\cos(x) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}.}$$

De la même façon :

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}.}$$

(b) On remarque que $x = \pi\ [2\pi]$ n'est pas solution de (E). Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. L'inéquation devient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{2t}{1+t^2} \geq -\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow\ & 2t \geq -1+t^2 \text{ car } 1+t^2>0 \\ \Leftrightarrow\ & t^2-2t-1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & t \in \left[1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $1-\sqrt{2} \leq \tan\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1+\sqrt{2}$.
Or, d'après précédemment : $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$. Par imparité de la fonction tangente : $\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1-\sqrt{2}$.
Ainsi : $1-\sqrt{2} \leq \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \leq \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Graphiquement : $\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \leq \tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{2}\right[\ [\pi]$.

De la même façon : $\tan(\alpha) \leq \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{8}\right]$. Au final :

$$\begin{aligned} & 1-\sqrt{2} \leq \tan\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1+\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{8}\right] \cap \left[-\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{2}\right[\ [\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8}\right]\ [\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]\ [2\pi].} \end{aligned}$$

Problème :

A- A-1 L'équation n'est pas définie si et seulement si $3x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$ et $-2x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, si l'on pose $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}[2\pi]$, alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in D,\quad \tan(3x) = \tan(-2x) & \Leftrightarrow 3x = -2x\ [\pi] \\ & \Leftrightarrow 5x = 0[\pi] \\ & \Leftrightarrow x = 0\ \left[\frac{\pi}{5}\right]. \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues appartenant bien à D, on en déduit : $\boxed{S = \left\{0; \frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}; \pi; \frac{6\pi}{5}; \frac{7\pi}{5}; \frac{8\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}\right\}[2\pi].}$

A-2 Voir cours.

A-3
$$\begin{aligned} \tan(3x) = \tan(2x+x) & = \frac{\tan(2x)+\tan(x)}{1-\tan(2x)\tan(x)} \\ & = \frac{\dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} + \tan(x)}{1 - \dfrac{2\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}} \\ & = \frac{\dfrac{2\tan(x)+\tan(x)-\tan^3(x)}{1-\tan^2(x)}}{\dfrac{1-\tan^2(x)-2\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}} \\ & = \boxed{\frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}.} \end{aligned}$$

A-4 Nous savons que α est solution de l'équation : $\tan(3x) = \tan(-2x)$. Or, $\tan(3x) = \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$ et $\tan(-2x) = -\tan(2x) = \frac{-2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$, ce qui entraîne la relation :

$$\begin{aligned} & \frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)} = \frac{-2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \\ \Leftrightarrow\ & (3\tan(x)-\tan^3(x))(1-\tan^2(x)) = -2\tan(x)+6\tan^3(x) \\ \Leftrightarrow\ & 3\tan(x)-4\tan^3(x)+\tan^5(x) = -2\tan(x)+6\tan^3(x) \\ \Leftrightarrow\ & \tan^5(x)-10\tan^3(x)+5\tan(x) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\alpha^5 - 10\alpha^3 + 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 5 = 0$ puisque : $\alpha \neq 0$. On en déduit que :

$\boxed{\alpha \text{ est solution de } X^4 - 10X^2 + 5 = 0.}$

A-5 On pose : $u = X^2$ ce qui nous ramène au trinôme : $u^2 - 10u + 5 = 0$ de discriminant $\Delta = 80 = (4\sqrt{5})^2$. Les deux solutions réelles sont donc : $5 - 2\sqrt{5}$ et $5 + 2\sqrt{5}$. Ainsi : $X^2 = 5 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ car $5 - 2\sqrt{5} > 0$. De même : $X^2 = 5 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Finalement, $\boxed{S = \{\sqrt{5-2\sqrt{5}};\ -\sqrt{5-2\sqrt{5}};\ \sqrt{5+2\sqrt{5}};\ -\sqrt{5+2\sqrt{5}}\}.}$

α est donc l'une des quatre valeurs. Or $\alpha > 0$, donc nécessairement, $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, ou $\alpha = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Pour finir, puisque $\frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{3}$, on en déduit : $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) > \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ($\tan$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$), ou encore : $\alpha > \sqrt{3}$.

Il ne reste plus qu'à constater que : $\sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{3}$. En effet, ceci est équivalent à : $5 - 2\sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 < 5$. Nous pouvons donc conclure que :

$$\boxed{\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.}$$

B- B-1 (a) Si $\frac{z_0+i}{z_0-i} = e^{\frac{i2\pi}{5}}$, alors : $\left(\frac{z_0+i}{z_0-i}\right)^5 = (e^{\frac{i2\pi}{5}})^5 = 1$ donc : $(z_0+i)^5 = (z_0-i)^5$ ce qui entraîne : $\frac{1}{2i}\left((z_0+i)^5 - (z_0-i)^5\right) = 0$ donc : $P(z_0) = 0$.

(b) $$\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{i2\pi}{5}} \Leftrightarrow z + i = (z-i)e^{\frac{i2\pi}{5}} \Leftrightarrow \boxed{z = -i\frac{1+e^{\frac{i2\pi}{5}}}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}}}$$

(c) Soit θ non nul à 2π près de sorte que l'expression est bien définie.

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}2\cos(\frac{\theta}{2})}{-2ie^{i\theta/2}\sin(\frac{\theta}{2})} = \boxed{i\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}}.$$

(d) D'après précédemment : $-i\frac{1+e^{\frac{i2\pi}{5}}}{1-e^{\frac{i2\pi}{5}}}$ est la solution de l'équation : $\frac{z+i}{z-i} = e^{2i\pi/5}$. Or, d'après la question précédente : $\frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1+e^{i2\pi/5}}{1-e^{i2\pi/5}}$. Ainsi : $\boxed{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$ est la solution de l'équation $\frac{z+i}{z-i} = e^{2i\pi/5}$, donc <u>une solution de $P(z) = 0$</u> d'après ci-dessus, ce qu'il fallait démontrer.

B-2 (a)
$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(z^5 + 5z^4i + 10z^3(i^2) + 10z^2(i^3) + 5zi^4 + i^5 \right.\\ &\quad \left. - \left[z^5 - 5z^4i + 10z^3(i^2) - 10z^2(i^3) + 5zi^4 - i^5\right]\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(10z^4i - 20iz^2 + 2i\right) \\ &= \boxed{5z^4 - 10z^2 + 1} \end{aligned}$$

(b)
- On résout $5X^2 - 10X + 1 = 0(*)$. Le discriminant du trinôme sous jacent est $100 - 45 = 80$. Les solutions de l'équation $(*)$ sont $\frac{10-\sqrt{80}}{25} = \frac{10-4\sqrt{5}}{25} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$. On remarque que ces deux racines sont positives puisque $10 > \sqrt{80}$.
-

Le nombre z est racine de P si et seulement si z^2 est solution de $(*)$
si et seulement si $z^2 = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $z^2 = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
si et seulement si $z = \pm\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$ ou $z = \pm\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont donc } \pm\sqrt{1-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}} \text{ et } \pm\sqrt{1+\tfrac{2\sqrt{5}}{5}}.}$$

(c) D'après les résultats précédents, $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ est une racine de P. De plus, On a :

$$\begin{aligned} 0<\frac{\pi}{5}\leq\frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 0<\tan(\frac{\pi}{5})\leq\tan(\frac{\pi}{3}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}>0 \end{aligned}$$

Or les deux racines positives de P sont $\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ et $\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

On constate de plus que :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}}<\frac{\sqrt{3}}{3} \quad &\Leftrightarrow 1-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}<\tfrac{1}{3}\ . \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5}>\tfrac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow 5>\tfrac{25}{9} \\ &\Leftrightarrow 45>25 \end{aligned}$$

Donc nécessairement :,

$$\boxed{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}},}$$

Pour finir,
$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{1-(5-2\sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}-2} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)} \\ &= \boxed{\sqrt{5+2\sqrt{5}}.} \end{aligned}$$