Devoir surveillé n° 12.

Durée : 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

Les questions suivantes sont indépendantes

1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x-2y \\ x+2y \end{pmatrix}$. Montrer que f est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.
2. On pose $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 1))$ et on admet que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
3. Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $\Phi(P) = XP'' + P' + P$.
   (Q 1) Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
   (Q 2) Montrer que $(\Phi - Id)^2(P) = 2P''$ puis que $(\Phi - Id)^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$.
   (Q 3) Montrer que Φ est un isomorphisme.
   (Q 4) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Phi - Id)$.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 2f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f - 2id)$.

Problème 1

On note $E = C^0([0;\ 1], \mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x, t) \in [0, 1]^2$, on note $\min(x, t) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq t \\ t \text{ sinon.} \end{cases}$

Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.

2. Soient $h \in E$ et $a \in [0;\ 1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $[0;\ 1]$ et déterminer sa dérivée.

3. Cas particuliers

3.1 Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

3.2 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\ dt$.

3.3 Soit x un réel de $[0, 1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x, t)\ dt$ en fonction de x.

4. Soit $f \in E$.

4.1 Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x, t) f(t)\ dt$ définit une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $F'(x)$.

4.2 Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.

4.3 Démontrer alors que F est de classe C^2 sur $[0;\ 1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe $T(f)$ définie par : $\forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x, t) f(t)\ dt$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.

6. L'application T est-elle injective ?

7. On pose $A = \{G \in C^2([0;\ 1], \mathbb{R}),\ G(0) = G'(1) = 0.\}$.

7.1 Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.
7.2 Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.
7.3 Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda id_E)$.
8.1 Montrer que si $E_\lambda \neq \{0_E\}$, alors $\lambda > 0$. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question **4**.*
8.2 Plus précisément, toujours à l'aide de la question **4**, montrer que $E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \lambda = \dfrac{4}{\pi^2} \times \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.
8.3 Pour les valeurs de λ obtenues à la question précédente, déterminer la dimension et une base de E_λ.

Problème 2

Dans tout le problème on note x un réel tel que $x \in [0;\ 1[$.

1. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
1.1 Déterminer un équivalent de $a_{n+1} - a_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.
1.2 En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est convergente vers un réel que l'on notera γ puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On note dans la suite du problème $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.
2.1 Justifier que $I_n(x)$ est bien défini pour tout entier naturel n et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$.
2.2 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n(x) - I_{n-1}(x) = -\dfrac{x^n}{n}$.
2.3 En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + I_n(x)$.
2.4 En déduire que la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

3. Montrer que la série $\sum \ln(n) x^n$ est une série convergente. On note ci-dessous $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$.

4. Montrer que la série $\sum H_n x^n$ est une série convergente. On note ci-dessous : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.

5. Rappeler la formule du produit de deux polynômes et en déduire que pour tout entier naturel n :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} H_k x^k.$$

6. En déduire $g(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

7. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [0;\ 1[,\ |f(x) - g(x)| \leq \dfrac{M}{1-x}$.

8. En déduire $f(x) \sim_1 g(x)$.

Correction de l'exercice :

1. Cf fiche méthode pour le principe.
2. Cf fiche méthode pour le principe.
3. (Q 1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$. On calcule

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)'' + (\lambda P + \mu Q)' + \lambda P + \mu Q = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).$$

Par définition, Φ est donc linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. On en déduit : $\Phi(P) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

(Q 2) $$\begin{aligned}(\Phi - Id)^2(P) &= (\Phi - Id)(\Phi(P) - P)\\ &= (\Phi - Id)(XP'' + P')\\ &= \Phi(XP'' + P') - (XP'' + P')\\ &= x(XP'' + P')'' + (XP'' + P')'.\end{aligned}$$

Or : $(XP'' + P')' = XP^{(3)} + 2P'' = 2P''$ car $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc $(XP'' + P')'' = 0$ de la même façon. On en déduit : $(\Phi - Id)^2(P) = 2P''$.

Ainsi, $(\Phi - Id)^3(P) = (\Phi - Id)(2P'') = 0$ toujours car $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $(\Phi - Id)^3 = 0$.

(Q 3) On sait que $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, X+1, 4X+X^2)$. De plus $(1, X+1, 4X+X^2)$ est libre car de degrés échelonnés donc $\mathrm{rg}(\Phi) = 3$. Enfin $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc : $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ ce qui prouve que Φ est surjective. Φ étant un endomorphisme, elle est également injective donc est bijective et linéaire donc est un isomorphisme.

(Q 4) $P \in \mathrm{Ker}(\Phi - Id) \Leftrightarrow \Phi(P) - P = 0 \Leftrightarrow XP'' + P' = 0$. En notant $P = ax^2 + bX + c$, la condition s'écrit : $4aX + b = 0 \Leftrightarrow 4a = O$ et $c = 0$. On en déduit : $P \in \mathrm{Ker}(\Phi - Id) \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow P = c \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(\Phi - Id) = \mathrm{Vect}(1)$. Toute famille constituée dun seul vecteur est libre donc (1) est libre est génératrice (car $\mathrm{Ker}(\Phi - Id) = \mathrm{Vect}(1)$) donc est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi - Id)$.

4. Cf DM.

Correction du problème 1:

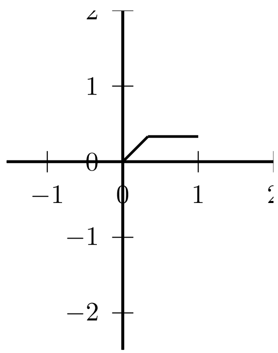
1. Si $\alpha > 0$, $S_H = \{t \mapsto a\cos(\sqrt{\alpha}t) + b\sin(\sqrt{\alpha}t),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si $\alpha < 0$, $S_H = \{t \mapsto a\exp(\sqrt{-\alpha}t) + b\exp(-\sqrt{-\alpha}t),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si $\alpha = 0$, $S_H = \{t \mapsto at + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

2. Puisque h est continue sur $[0;\ 1]$, d'après le théorème de limite de la dérivée, H est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1],\ H'(x) = h(x)$.

3. **3.1**



3.2 Par Chasles
$$\begin{aligned}\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\ dt &= \int_0^{1/3} \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\ dt + \int_{1/3}^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\ dt\\ &= \int_0^{1/3} t\ dt + \int_{1/3}^1 \frac{1}{3}\ dt\\ &= \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{3} \times (1 - \tfrac{1}{3})\\ &= \tfrac{5}{18}.\end{aligned}$$

3.3 De même :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \min(x,t)\ dt &= \int_0^x \min\left(\frac{1}{3},t\right)\ dt + \int_x^1 \min\left(\frac{1}{3},t\right)\ dt\\ &= \int_0^x t\ dt + \int_x^1 x\ dt\\ &= \frac{x^2}{2} + x(1-x)\\ &= \boxed{\frac{x}{2}(2-x)\,.}\end{aligned}$$

4. Soit $f \in E$.

4.1 La fonction $t \mapsto \min(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et f est continue sur $[0,1]$ par hypothèse. Par produit, $t \mapsto \min(x,t)f(t)$ est continue sur $[0,1]$ ce qui justifie l'existence de F. De plus, en utilisant la relation de Chasles comme précédemment il vient :
$F(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\ dt + x\int_x^1 f(t)\ dt$. Or, d'après 2, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)$ est de classe C^1 et a pour dérivée $x \mapsto xf(x)$.
De même $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt = -\int_1^x f(t)\ dt$ est dérivable et a pour expression $x \mapsto -f(x)$. Ainsi, par produit et somme F est de classe C^1 et :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\ dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)\ dt.}$$

4.2 On constate donc que $F'(1) = 0$. Nous avons également $F(0) = 0$ pour les mêmes raisons.

4.3 $\forall x \in [0,1],\ F'(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt$. Or, $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et sa dérivée a pour expression $x \mapsto -f(x)$. Ainsi F' est de classe C^1 sur $[0,1]$ ce qui prouve que F est de classe C^2 sur $[0,1]$. De plus :
$\boxed{\forall x \in [0,1],\ F''(x) = -f(x).}$

5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$. Alors par linéarité : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,
$\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)(\lambda f(t) + \mu g(t))\ dt = \lambda\int_0^1 \min(x,t)f(t)\ dt + \mu\int_0^1 \min(x,t)g(t)\ dt.$
Ainsi : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ ce qui prouve que T est linéaire.

D'autre part, d'après 41, si $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Ainsi $T(f) \in E$.

Les deux points ci-dessus étant vérifiés on en déduit $T(f) \in \mathcal{L}(E)$.

6. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$, alors : $\forall x \in [0,1], \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\ dt$. Notons $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\ dt$. D'après 43 F est de classe C^2 sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], F''(x) = -f(x)$. Or $f \in \mathrm{Ker}(T)$ donc $\forall x \in [0,1], F(x) = 0$. Ainsi : $\forall x \in [0,1],\ F''(x) = 0$. On en déduit $\forall x \in [0,1],\ -f(x) = 0$ donc $f = 0_E$. Nous avons donc prouvé que $\mathrm{Ker}(T) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant évidente car le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel par propriété, on en déduit :
$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \{0_E\}}$ ce qui prouve que T est injective.

7. **7.1** Soit $F \in \mathrm{Im}(T)$. Alors il existe $f \in E$ tel que $\forall x \in [0,1], F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\ dt$. Or d'après 42 $F(0) = F'(1) = 0$ et d'après 43 F est de classe C^2 sur $[0,1]$. On en déduit que $F \in A$, ce qu'il fallait démontrer.
Au final $\boxed{\mathrm{Im}(T) \subset A}$ où $A = \{G \in C^2([0;\ 1],\mathbb{R}),\ G(0) = G'(1) = 0.\}$.

7.2 Soit $G \in A$. Alors :

$$\begin{aligned}T(G'')(x) &= \int_0^1 \min(x,t)G''(t)\ dt\\ &= \int_0^x tg''(t)\ dt + x\int_x^1 G''(t)\ dt\\ &= \int_0^x tG''(t)\ dt + x(G'(1) - G'(x))\\ &= \int_0^x tG''(t)\ dt - xG'(x) \text{ car } g \in A\end{aligned}$$

De plus, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x tG''(t)\ dt &= [tG'(t)]_0^x - \int_0^x G'(t)\ dt\\ &= xG'(x) - G(x) + G(0)\\ &= xG'(x) - G(x)\end{aligned}$$

En sommant, on en déduit : $\boxed{T(G'') = -G.}$

7.3 Soit $G \in A$, alors d'après la question précédente $G = -T(G'') = T(-G'')$ par linéarité. Posons $g = -G''$. Comme G est de classe C^2 sur $[0,1]$ on en déduit g continue sur $[0,1]$. Ainsi il existe $g \in E$ tel que $G = T(g)$ ce qui prouve que $g \in \mathrm{Im}(T)$. Nous avons donc $A \subset \mathrm{Im}(T)$. L'autre inclusion étant également vraie d'après ci-dessus, par double inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(T) = A.}$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda id_E)$.

8.1 On suppose $E_\lambda \neq \{0_E\}$. Soit donc $f \neq 0_E$ telle que $T(f) = \lambda f$ c'est à dire telle que $\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \lambda f(x)$. On veut montrer que $\lambda > 0$. Pour ceci on suppose par l'absurde $\lambda \leq 0$. On distingue les cas suivants :

— $\lambda = 0$, alors $f \in \mathrm{Ker}(T)$. Or T est injective donc nécessairement $f = 0_E$. Contradiction puisque $f \neq 0_E$ par hypothèse.

— $\lambda < 0$. Alors, $x \mapsto T(f)(x)$ est de classe C^2 d'après 43. On on en déduit donc que f est de classe C^2 puisque $f = \dfrac{1}{\lambda}T(f)$. En dérivant deux fois la relation : $\forall x \in [0,1], T(f)(x) = \lambda f(x)$ on en déduit d'après 43 que $\forall x \in [0,1], -f(x) = \lambda f''(x)$ donc $\forall x \in [0,1], f''(x) + \alpha f(x) = 0$ avec $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$. Comme $\alpha < 0$ puisque $\lambda < 0$ on déduit de 1 l'existence de deux réels a et b tels que :
$\forall x \in [0,1], f(x) = a\exp(\sqrt{-\alpha}t) + b\exp(-\sqrt{-\alpha}t)$.

Par ailleurs, dans la mesure où par linéarité $f = T\left(\frac{1}{\lambda}f\right)$ nous avons $f \in \mathrm{Im}(T)$ et donc $f \in A$ ce qui prouve que : $f(0) = f'(1) = 0$. Cela donne alors les relations : $a + b = 0$ et $(a-b)\sqrt{-\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}} = 0$. L'exponentielle étant toujours strictement positive on en déduit $a + b = a - b = 0$ ce qui entraîne $a = b = 0$ et donc $f = 0_E$. Contradiction puisque $f \neq 0_E$ par hypothèse/

Par l'absurde, si $E_\lambda \neq \{0_E\}$, alors $\lambda > 0$.

8.2 On étudie d'abord $\Rightarrow$:

En suivant exactement la démarche précdénte nous avons $f \neq 0_E$ telle que : $\forall x \in [0,1], f''(x) + \alpha f(x) = 0$ avec $\alpha > 0$, $f(0) = f'(1) = 0$ et donc par 1 : $\forall x \in [0,1], f(x) = a\cos(\sqrt{\alpha}t) + b\sin(\sqrt{\alpha}t)$ avec $a = 0$ et $\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha})b = 0$.

Or f n'est pas la fonction nulle donc nécessairement $b \neq 0$. Ainsi : $\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{\alpha}) = 0$ car $\alpha > 0$.

Or $\cos(\sqrt{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \sqrt{\alpha} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{((2k+1)\pi)^2}{4}$. On en déduit puisque $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$ que $\exists k \in \mathbb{Z}, \lambda = \dfrac{4}{\pi^2} \times \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement si $\exists k \in \mathbb{Z}, \lambda = \dfrac{4}{\pi^2} \times \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ alors la fonction d'expression $\forall x \in [0,1], g(x) = \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$ est telle que $\forall x \in [0,1],\ g''(x) = -\dfrac{1}{\lambda}g(x)$. Par linéarité de T on en déduit que $T(g'') = -\dfrac{1}{\lambda}T(g)$. Comme $T(g'') = -g$ alors $T(g) = \lambda g$, on a prouvé que g est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E)$ ce qui prouve que $E_\lambda \neq \{0_E\}$.

8.3 Posons $\lambda = \dfrac{4}{\pi^2} \times \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$. D'après précdemment, si $f \in E_\lambda$ alors f est telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = b\sin(\sqrt{\alpha}x)$. Ainsi : $E_\lambda \subset \mathrm{Vect}(x \mapsto \sin(\sqrt{\alpha}x)$. L'autre inclusion a déjà été prouvée à la question précédente. Par double inclusion : $E_\lambda = \mathrm{Vect}(x \mapsto \sin(\sqrt{\alpha}x)$ ce qui prouve que la famille constutuée du vecteur non nul $x \mapsto \sin(\sqrt{\alpha}x$ est génératrice. Sa liberté étant évidente on en déduit qu'il s'agit d'une base de E_λ ce qui prouve que $\boxed{\dim(E_\lambda) = 1.}$

Correction du problème 2:

1. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1.1 Nous avons par Chasles : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ ce qui prouve que $a_{n+1} - a_n \sim \dfrac{1}{2(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(n+1)^2} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$.

1.2 Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n^2} > 0$. De plus $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ est convergente d'après le critère de convergence des séries de Riemann. Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_{n+1}-a_n)$ est convergente donc que (a_n) est convergente par télescopage.

Nous avons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \gamma$ ce qui s'écrit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

2.1 Pour $t\in[0,x]$, $t\mapsto \dfrac{t^n}{1-t}$ est continue sur $[0,x]$ donc l'intégrale est bien définie ce qui justifie que $I_n(x)$ est bien défini pour tout $x\in[0,1[$.

Par ailleurs $\forall t \in [0,x],\ 1-t \geq 1-x$ et donc $\forall t\in[0,x], 0 \leq dfract^n1-t \leq \dfrac{1}{1-x}t^n$. Par croissance d el'intégrale on en déduit : $\forall x\in [0;\ 1[0 \leq I_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{1}{1-x}$. Comme $x\in[0;\ 1[$, par opérations usuelles $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{1}{1-x} = 0$ donc par encadrement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = 0.}$

2.2 Par linéarité : $I_n(x) - I_{n-1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n - t^{n-1}}{1-t}\,dt$; Or $t^n - t^{n-1} = t^{n-1}(t-1)$ donc après simplifications on en déduit :

$\boxed{I_n(x) - I_{n-1}(x) =} - \displaystyle\int 0^x t^{n-1}\,dt = \boxed{-\frac{x^n}{n}.}$

2.3 Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_k(x) - I_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$. Par télescopage : $I_n - I_0 = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$. Par ailleurs $I_0 = \displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$. En réorganisant l'égalité précédente nous enb déduisons : pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + I_n(x).}$$

2.4 Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} - \ln(1-x) - I_n(x)$. Or, d'après précédemment $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$.

Ainsi par somme la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ converge vers $-\ln(1-x)$. Par définition cela signifie que la série $\displaystyle\sum\frac{x^n}{n}$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$

3. Soit $x\in[0;\ 1[$. Alors par croissances comparées $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\ln(n)x^n = 0$. Cette suite est donc bornée ce qui assure l'existence de $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n^2\ln(n)x^n \leq M$. Nous avons donc :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n)x^n \leq \dfrac{M}{n^2}$. Les séries étant à termes positifs et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ étant convergente d'après le critère de convergence des séries de Riemann, on en déduit par critère de mjoration des séries à termes positifs que <u>la série $\sum\ln(n)x^n$ est une série convergente.</u>

4. Puisque d'après précédemment $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ on en déduit $H_n \sim \ln(n)$. Or, d'après la question ci-dessus $\sum\ln(n)x^n$ est une série convergente. Par comparaison des séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum H_n x^n$ est une série convergente.

5. Rappelons la formule du produit de deux polynômes :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \times \sum k = 0^m b_k x^k = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k.$$

Avec $a_k = 1$, $b_k = \dfrac{1}{k}$, $b_0 = 0$ et $m = n$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \times \sum k = 0^m b_k x^k &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{k-i}\right) x^k \text{ car } b_0 = 0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k-1} 1\frac{1}{k-i}\right) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{k} + \ldots + 1\right) x^k \\ &\boxed{= \sum_{k=1}^{2n} H_k x^k.}\end{aligned}$$

6. D'après 4 la série $\sum H_n x^n$ c'est à dire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k$ converge vers $g(x)$. Par propriété des suites extraites $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} H_k x^k = g(x)$.

D'après 24 la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

D'après le résultat sur les séries géométriques, si $|x| < 1$ (ici $x \in [0,1[$ donc $|x| < 1$) la série $\sum x^n$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1}{1-x}$.

En passant à la limite dans la relation $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} H_k x^k$, on en déduit :

$\dfrac{1}{1-x} \times (-\ln(1-x)) = g(x)$ donc : $\boxed{g(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}.}$

7. Par linéarité $\sum_{k=1}^{n} H_k x^k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$. Nous avons donc :

$0 \leq |\sum_{k=1}^{n} H_k x^k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| x^k$ par inégalité triangulaire.

Or, d'après 12 (a_n) converge. En particulier elle est bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, $\forall k \in \mathbb{N}^* |a_k| \leq M$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |a_k| x^k \leq M x^k$. Par conséquent en sommant nous obtenons :
$\sum_{k=1}^{n} |a_k| x^k \leq \sum_{k=1}^{n} M x^k$. Or, $\sum_{k=1}^{n} M x^k = M\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \leq \dfrac{1}{1-x}$ car $x^{n+1} > 0$. Au final :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |\sum_{k=1}^{n} H_k x^k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) x^k| \leq M\dfrac{1}{1-x}$, ce qui en passant l'inégalité à la limite donne :

$|g(x) - f(x)| \leq \dfrac{M}{1-x} \Leftrightarrow \boxed{|f(x) - g(x)| \leq \dfrac{M}{1-x}.}$

8. En divisant l'inégalité précédente par $|g(x)|$, ce qui est possible car $\forall x \in]0,1[,\ \dfrac{\ln(1-x)}{x-1} \neq 0$, nous en déduisons :

$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq \left|\dfrac{f(x)-}{g(x)} - 1\right| \leq \dfrac{M}{|\ln(1-x)|}$. Or par opérations usuelles $\lim_{x\to 1} \dfrac{M}{|\ln(1-x)|} = 0$ donc par encadrement $\lim_{x\to 1} \left|\dfrac{f(x)-}{g(x)} - 1\right| = 0$ ce qui revient à dire que $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Au final, par définition : $\boxed{f(x) \sim_1 g(x).}$