Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1.

Durée : 2 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Exercice

- Petits exercices en vrac -

1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $\ln(x)+\ln(1-x)=\ln(2x-1)$; (b) $\dfrac{e^x-2}{e^x-3}\leq 4$; (c) $|x-1|\leq \dfrac{x+1}{2}$; (d) $\sqrt{x^2+1}=2x+1$;
   (e) $2^x+4^x\leq 20$ (poser $X=2^x$.)
2. Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel m : $\begin{cases} x+my+z &= 1 \\ mx+y+z &= 2 \\ x+y+2z &= m+3 \end{cases}$.
3. Résoudre l'équation suivante selon les valeurs du paramètre réel m : $m(m-1)x^2+mx+3=0$.
4. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $A\cap B=A\cap C \Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$.
5. On pose : $A=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n};\,1+\frac{1}{n}\right[$.
   (a) Que signifie $x\in A$?
   (b) Sans démonstration donnez la valeur de A.
   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.
6. Soient a, b et c trois réels strictement positifs et tels que : $b+c>a$, $a+b>c$ et $a+c>b$. Montrer que : $\dfrac{a}{b+c}<\dfrac{2a}{a+b+c}$ puis que : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}<2$.

Problème

(Q 1) On rappelle que la fonction sinus hyperbolique, notée sh, est la fonction qui à tout réel x associe :

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

et que la fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est la fonction qui à tout réel x associe :

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

(Q a) En faisant l'étude de la fonction sh, donner son tableau de variations. On précisera le calcul des limites en $\pm\infty$.

(Q b) Résoudre $\mathrm{sh}(x)=0$ (en effectuant des calculs).

(Q 2) L'objectif est de résoudre l'équation : $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(3x)=1$ $(\star)$. On pose $X=e^{2x}$.

(Q a) Montrer que $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(3x)=1 \Leftrightarrow X^4+X^3-4X^2+X+1=0$

(Q b) En effectuant deux divisions euclidiennes, factoriser $X^4+X^3-4X^2+X+1$.

(Q c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\star)$.

(Q 3) (a) Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)=\mathrm{sh}(a+b)$$

(b) La fonction th est définie par : $\mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ pour tout réel x. Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)}=\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)$$

(c) En utilisant notamment les résultats de la question 2, résoudre l'équation

$$\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(3x)=\mathrm{sh}(4x)$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆

Exercice :

1. (a) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si : $x > 0$, $2x - 1 > 0$ et $1 - x > 0$ c'est à dire pour $x \in \left]\frac{1}{2};\ 1\right[$.

$$\begin{aligned}\forall x \in]0;\ 1[, \quad \ln(x) + \ln(1-x) = \ln(2x-1) &\Leftrightarrow \ln(x(1-x)) = \ln(2x-1)\\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 2x - 1\\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Or : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc n'appartient pas à l'intervalle : $\left]\frac{1}{2};\ 1\right[$. En revanche, comme : $4 < 5 < 9$, $2 < \sqrt{5} < 3$ ce qui prouve que : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$.

Finalement : $\boxed{S = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.}$

(b) Les termes de l'inéquation ne sont pas définis si et seulement si : $e^x - 3 = 0$ c'est à dire $x = \ln(3)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{\ln(3)\}, \quad \frac{e^x - 2}{e^x - 3} \leq 4 \quad \Leftrightarrow \frac{e^x - 2 - 4(e^x - 3)}{e^x - 3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{-3e^x + 10}{e^x - 3} \leq 0.$$

. Or : $e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \ln(3)$ et $-3e^x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < \ln\left(\dfrac{10}{3}\right)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$\ln\left(\frac{10}{3}\right)$		$+\infty$
$-3e^x + 10$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$e^x - 3$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{-3e^x + 10}{e^x - 3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit : $\boxed{S =]-\infty; \ln(3)[\cup \left[\ln\left(\dfrac{10}{3}\right);\ +\infty\right[.}$

(c) On distingue deux cas :

— $\underline{x \geq 1}$. Alors $x - 1 \geq 0$ donc : $|x-1| = x - 1$. L'inéquation devient alors : $x - 1 \leq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x \leq 3$. Nous avons donc : $S_1 = [1;\ 3]$.

— $\underline{x < 1}$. Alors $x - 1 < 0$ et donc : $|x-1| = 1 - x$. L'inéquation devient alors : $1 - x \leq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Nous avons donc : $S_2 = \left[\frac{1}{3};\ 1\right[$.

Finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \boxed{\left[\dfrac{1}{3};\ 3\right].}$

(d) Les termes de l'équation sont définis pour tout réel x. Procédons par analyse-synthèse :

- **Analyse.** $\sqrt{x^2+1} = 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = (2x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x(3x+4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$.
- **Synthèse.** On vérifie que 0 convient mais $-\frac{4}{3}$ ne convient pas.

Finalement : $\boxed{S = \{0\}.}$

(e) Posons $X = 2^x$. Alors : $X^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$ donc l'inéquation devient : $X^2 + X - 20 \leq 0$. Nous reconnaissons alors un trinôme de discriminant $\Delta = 81$. Nous avons donc deux solutions réelles distinctes : $X_1 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$, $X_2 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$. Par conséquent :

$2^x + 4^x \leq 20 \Leftrightarrow -5 \leq 2^x \leq 4$. Puisque pour tout réel x, $2^x > 0$, alors l'inéquation $2^x \geq -5$ est toujours vérifiée. D'autre part :

$$\begin{aligned}2^x \leq 4 &\Leftrightarrow \ln(2^x) \leq \ln(4)\\ &\Leftrightarrow x\ln(2) \leq \ln(4)\\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln(4)}{\ln(2)}\\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \quad \text{car } \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2).\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{S =]-\infty;\ 2].}$

2. Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +my & +z & = 1\\ mx & +y & +z & = 2\\ x & +y & +2z & = m+3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} x & +my & +z & = 1\\ & (1-m^2)y & +(1-m)z & = 2-m\\ & (1-m)y & +z & = m+2\end{array}\right.$$

On distingue alors trois cas :

— $\underline{m=1}$ ce qui donne le système : $\left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ 0 & =1 \\ z & =2 \end{array}\right.$ ce qui est impossible : $S=\emptyset$.

— $\underline{m=0}$ ce qui donne le système : $\left\{\begin{array}{ll} x+z & =1 \\ y+z & =2 \\ y+z & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =1-z \\ y & =2-z \end{array}\right.$ ce qui donne : $S=\{(1-z;\ 2-z;\ z), z\in\mathbb{R}\}$.

— $\underline{m\neq 1 \text{ et } m\neq 0}$. Nous pouvons alors diviser par $1-m$ ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ y+\frac{z}{1-m} & =\frac{2+m}{1-m} \\ (1+m)y+z & =\frac{2-m}{1-m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ y+\frac{z}{1-m} & =\frac{2+m}{1-m} \\ (1-\frac{1+m}{1-m})z & =\frac{2-m-(1+m)(2+m)}{1-m} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ y+\frac{z}{1-m} & =\frac{2+m}{1-m} \\ \frac{-2m}{1-m}z & =\frac{-m^2-4m}{1-m} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ y+\frac{z}{1-m} & =\frac{2+m}{1-m} \\ z & =\frac{m+4}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x+my+z & =1 \\ y & =\frac{2+m}{1-m}-\frac{4+m}{2(1-m)} \\ z & =\frac{m+4}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =1-\frac{m^2}{2(1-m)}-\frac{4+m}{2} \\ y & =\frac{m}{2(1-m)} \\ z & =\frac{m+4}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ll} x & =\frac{m-2}{2(1-m)} \\ y & =\frac{m}{2(1-m)} \\ z & =\frac{m+4}{2} \end{array}\right.}$$

3. — $\underline{\text{Pour } m=0}$ nous obtenons $3=0$ ce qui est impossible : $\underline{S=\emptyset.}$
   — $\underline{\text{Pour } m=1}$ nous obtenons : $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$. $\boxed{S=\{-3\}.}$
   — Soit $m\neq 0$ et $m\neq 1$. Nous avons alors un trinôme de discriminant : $\Delta = m(-11m+12)$. Ainsi :
   - Si $m\in]-\infty;\ 0[\cup]\frac{12}{11};\ +\infty[$, alors $\Delta<0$ ce qui ne donne aucune solution réelle : $\underline{S=\emptyset.}$
   - Si $m=\frac{12}{11}$, le trinôme a un discriminant nul donc une unique solution double : $x_0=\dfrac{1}{2(1-m)}=6$: $\underline{S=\{x_0\}.}$
   - Sinon, le discriminant est strictement positif dont les racines ont pour expressions : $\boxed{x_1=\dfrac{-m-\sqrt{m(-11m+12)}}{2m(m-1)}}$, $\boxed{x_2=\dfrac{-m+\sqrt{m(-11m+12)}}{2m(m-1)}}$. $\underline{S=\{x_1;\ x_2\}.}$

4. — $\Rightarrow$. On suppose que $A\cap B=A\cap C$ et on montre que $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$ par double inclusion :

   $\subset$: Soit $x\in A\cap\overline{B}$. Alors : $x\in A$ et $x\notin B$. Si nous avions $x\in C$, alors $x\in A\cap C$ donc $x\in A\cap B$ ce qui amène $x\in B$ ce qui est impossible. Nécessairement, $x\notin C$ ce qui prouve que $x\in A\cap\overline{C}$.

   $\supset$: Soit $x\in A\cap\overline{C}$. Alors : $x\in A$ et $x\notin C$. Si nous avions $x\in B$, alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ ce qui amène $x\in C$ ce qui est impossible. Nécessairement, $x\notin B$ ce qui prouve que $x\in A\cap\overline{B}$.

   — $\Leftarrow$: On suppose que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$. Alors d'après l'implication précédente : $A\cap\overline{\overline{B}}=A\cap\overline{\overline{C}}$ ce qui donne $A=C$.

   Par double implication, nous avons bien démontré l'équivalence.

5. (a) Cela signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\leq x\leq 1+\dfrac{1}{n}$.
   (b) On conjecture : $A=\{1\}$.
   (c) On procède par double inclusion :

   $\supset$: On constate que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\leq 1\leq 1+\dfrac{1}{n}$ ce qui prouve que $1\in A$ soit $\{1\}\subset A$, ce qu'il fallait démontrer.

$\subset$: Soit $x \in A$ donc tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{n}$. Par passage à la limite, on en déduit : $0 \leq x \leq 1$. De plus, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{n}$, alors en particulier : $1 \leq x \leq 2$. Ainsi : $x \in [0;\ 1] \cap [1;\ 2]$ ce qui prouve que $x = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

6. • $\dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c} \Leftrightarrow a(a+b+c) < 2a(b+c) \Leftrightarrow a^2 < a(b+c) \Leftrightarrow a < b+c$. La dernière inégalité étant vraie par hypothèse, on en déduit l'inégalité demandée par équivalence.

   • De même, on obtient : $\dfrac{b}{a+c} < \dfrac{2b}{a+b+c}$ puis $\dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2c}{a+b+c}$ ce qui donne en sommant :
   $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2a}{a+b+c} + \dfrac{2b}{a+b+c} + \dfrac{2c}{a+b+c}$. Or : $\dfrac{2a}{a+b+c} + \dfrac{2b}{a+b+c} + \dfrac{2c}{a+b+c} = \dfrac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2\dfrac{a+b+c}{a+b+c} = 2$. Par conséquent :

$$\boxed{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.}$$

Problème :

(Q 1) (Q a) La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. Or ch est une fonction strictement positive en tant que somme de deux exponentielles. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$
Finalement, le tableau de variations de sh est

x	$-\infty$	$+\infty$
sh	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(Q b) Les termes de l'équation sont définis pour tout réel x.

$$\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x$$

étant donné que $\exp$ est strictement croissante. Donc

$$\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

L'équation a une unique solution, à savoir 0.

(Q 2) (Q a)

$$\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(3x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} = 1 \Leftrightarrow e^{4x} + e^{-2x} + e^{2x} + e^{-4x} = 4$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \frac{1}{X} + X + \frac{1}{X^2} = 4 \Leftrightarrow X^4 + X + X^3 + 1 = 4X^2$$

équivalence vraie car $X \neq 0$. Donc

$$\boxed{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(3x) = 1 \Leftrightarrow X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 = 0}$$

(Q b) On remarque que 1 est racine évidente. Après division euclidienne, on a : $X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 = (X-1)(X^3 + 2X^2 - 2X - 1)$.
On en refait une sur $X^3 + 2X^2 - 2X - 1$ puisque 1 est encore racine évidente. On obtient alors $X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = (X-1)(X^2 + 3X + 1)$.
Le discriminant de $X^2 + 3X + 1$ est égal à $\sqrt{5}$ et ses racines sont $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Finalement,

$$\boxed{X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 = (X-1)^2\left(X - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

(Q c) Finalement, on a :

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} &= X \\ (X-1)^2(X - \frac{-3-\sqrt{5}}{2})(X - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}) &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} &= 1 \\ e^{2x} &= \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ e^{2x} &= \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(Q 3) (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On peut partir de la droite :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^b - e^{-b}}{2} \times \frac{e^a + e^{-a}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{b+a} + e^{b-a} - e^{-b+a} - e^{-b-a}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} - 2e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout (a, b) quelconque, on a montré :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) = \operatorname{sh}(a+b).}$$

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)} = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)} = \frac{\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)} + \frac{\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)} = \operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b).$$

Ceci étant vrai pour tout (a, b) quelconque, on a montré : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b) = \frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)}.}$$

(c) Les termes de l'équation sont définis pour tout réel x. Par ce qui précède, on a :

$$\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(3x) = \operatorname{sh}(4x) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sh}(x+3x)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(3x)} = \operatorname{sh}(4x) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sh}(4x)\Big(1 - \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(3x)\Big)}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(3x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{sh}(4x) & = & 0 \\ \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(3x) & = & 1 \end{array} \right.$$

puisque ch ne s'annule pas. Ainsi,

$$\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(3x) = \operatorname{sh}(4x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0$$

Cette équation a une unique solution, à savoir $\underline{0}$.