Lycée Antoine Bourdelle & Lycée Déodat de Severac

Mathématiques
Concours blanc
2023-2024

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

PROBLÈME D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

1.1 Calculer le rang de $A - I_3$. L'application $f - id$ est-elle un automorphisme ?

1.2 Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1.4 En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$. Préciser P.

1.5 L'application f est-elle bijective ?

2. On note dans cette question u l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par

$$u(P) = -P'' + 2XP' + P$$

2.1 Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et montrer que $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2.2 On note $u_n = u_{|\mathbb{R}_n[X]}$. Pourquoi u_n est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

3. On s'intéresse dans cette question à u_2.

3.1 Montrer que $\mathcal{B} = (1 - X; X - X^2; X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3.2 Vérifier que la matrice de u_2 dans cette base est la matrice A de la partie 1.

3.3 En utilisant les résultats de la partie 1, en déduire une base, que l'on précisera, de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de u_2 est diagonale.

4. On s'intéresse dans cette question à u_3.

4.1 Déterminer la matrice de u_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

4.2 En déduire une base ainsi que la dimension de $G = \mathrm{Ker}(u_3 - 7id_{\mathbb{R}_3[X]})$.

4.3 On pose : $F = \mathrm{Vect}(1, -2X, 4X^2 - 2)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

4.4 En déduire une base dans laquelle la matrice de u_3 est diagonale.

5. On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ est la dérivée n-ième de w.

En particulier $H_0(x) = 1$.

5.1 Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x), H_2(x)$ et $H_3(x)$.

5.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.

5.3 En déduire que $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$.

5.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n par récurrence.

5.5 Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant de H_n. Une récurrence n'est pas exigée pour cette question.

6. On note v et w les applications de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définies, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'.$$

On admet que v et w sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$. On note par ailleurs id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

6.1 Établir : $v \circ w = u - id$ et $w \circ v = u + id$.

6.2 En déduire $u \circ v - v \circ u = 2v$.

6.3 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.

6.4 En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N},\ H_n \in \operatorname{Ker}(u - (2n+1)id)$

PROBLÈME D'ANALYSE

---

1. **1.1** Pour x un réel tel que $x > 0$ montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ est une série convergente.

On note ℓ sa limite.

1.2 On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, V_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-x/k}\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$. Calculer $\ln(V_n(x))$ puis en déduire que la suite $\Big(V_n(x)\Big)_{n\geq 1}$ converge.

On note $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-x/k}\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma_n(p) = \displaystyle\int_0^n t^{p-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\, dt.$

2.1 Justifier l'existence de $\Gamma_n(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma_n(p) = n^p \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n\, du.$$

3. On pose : $I_{p,n} = \displaystyle\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n\, du$ pour $n \geq 0$ et pour $p \geq 1$.

3.1 Calculer $I_{p,0}$.

3.2 Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,n} = \dfrac{n}{p} I_{p+1,n-1}$.

3.3 En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,n} = \dfrac{n!}{p(p+1)\ldots(p+n)}$.

3.4 Montrer que : $\forall (n;\ p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \dfrac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n!} = p\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{p}{k}\right)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\varphi \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t} \end{cases}$.

4.1 Montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$. On note encore φ le prolongement obtenu.

4.2 L'application φ est-elle de classe C^1 sur $[0,1]$?

4.3 À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f : x \mapsto 1-(1-x)^n$, montrer que $\forall t \in [0;\ 1], 0 \leq \varphi(t) \leq n$.

5. Soit $n \geq 1$. On note $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t}\, dt$.

5.1 Justifier que I_n et J_n sont bien définies.

5.2 Montrer, en vous aidant d'un changement de variable que : $J_n = \displaystyle\int_{1/n}^1 \frac{(1-u)^n}{u}\, du$.

5.3 Calculer $\int_{1/n}^1 (1-u)^n\, du$.

5.4 En déduire que $0 \leq J_n \leq 1$.

5.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n} \left(\frac{(1-u)^{n+1}}{u} - \frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) du.$

5.6 Étudier le sens de variations de $g : u \mapsto \dfrac{(1-u)^{n+1}}{u}$ sur $]0;\ 1]$ et en déduire que (J_n) est croissante.

5.7 Finalement, montrer que (J_n) converge. *On admet dans la suite du devoir que (I_n) converge également*.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n).$

6.1 En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}\, dt = \frac{1}{n}$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \int_0^n \frac{1-\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\, du - \int_1^n \frac{1}{u}\, du.$$

6.2 En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \varphi(\frac{u}{n})\, du - \int_1^n \frac{(1-\frac{u}{n})^n}{u}\, du.$$

6.3 En déduire que (a_n) converge. On note γ sa limite dans la suite du devoir.

7. Soit $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

7.1 Montrer que :

$$pe^{pa_n}\prod_{k=1}^n \left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right) = \frac{p(p+1)\dots(p+n)}{n^p n!}.$$

7.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{p(p+1)\dots(p+n)}{n^p n!}$ converge et préciser la valeur de sa limite.

7.3 En déduire l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n(p)$ ainsi que la relation :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\, dt = \frac{e^{-\gamma p}}{p\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-p/n}\left(1+\frac{p}{n}\right)\right)}.$$

Lycée Antoine Bourdelle et Déodat de Séverac 4 heures

CORRECTION DU CCB 2024.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

1.1 *Calculer le rang de $A - I_3$. L'application $f - id$ est-elle un automorphisme ?*

$$rg(A - I_3) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix})$$
$$= rg(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = rg(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2.$$

Donc $rg(f - id) = 2 < 3$ et $f - id$ n'est pas un automorphisme.

1.2 *Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Testons la liberté de cette famille. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta - \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \gamma \\ \beta & = & 0 \\ \alpha & = & -\gamma \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc libre et de taille maximale, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Par théorème, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.3 *Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.* Calculons :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.4 *En déduire l'existence de $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$. Préciser P.*

Par la formule de changement de bases, on sait qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, à savoir $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 L'application f est-elle bijective ?

Puisque D est une matrice inversible en tant que matrice diagonale non nulle avec des coefficients diagonaux tous non nuls, on en déduit que A est inversible en tant que produit de matrices inversibles. Ainsi f est une application linéaire bijective.

2. *On note dans cette question u l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par $u(P) = -P'' + 2XP' + P$.*

2.1 *Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et montrer que $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.*
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$. Calculons :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= -\Big(\lambda P + \mu Q\Big)'' + 2X\Big(\lambda P + \mu Q\Big)' + \Big(\lambda P + \mu Q\Big) \\ &= -\Big(\lambda P'' + \mu Q''\Big) + 2X\Big(\lambda P' + \mu Q'\Big) + \Big(\lambda P + \mu Q\Big) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

De plus, par opérations usuelles, $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) \in \mathbb{R}[X]$.

Ces deux points montrent que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Enfin, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, $u(P) \in \mathbb{R}[X]$. De plus,

$$deg(u(P)) \leq max(deg(P''), deg(2XP'), deg(P)) \leq n.$$

Cela montre que $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

2.2 *On note $u_n = u_{\mathbb{R}_n[X]}$. Pourquoi u_n est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?*

L'application u_n est linéaire puisque u l'est et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], u_n(P) = u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ par la question précédente. Donc u_n est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On s'intéresse dans cette question à u_2.

3.1 Montrer que $\mathcal{B} = (1 - X; X - X^2; X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Testons sa liberté. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha(1 - X) + \beta(X - X^2) + \gamma X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha 1 + (\beta - \alpha)X + (\gamma - \beta)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$\Leftrightarrow_{(1,X,X^2) \text{ base canonique de } \mathbb{R}_2[X]} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta - \alpha & = & 0 \\ \gamma - \beta & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc libre, de cardinal maximal puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. **C'est donc une base de ce dernier.**

3.2 Calculons :

$$\begin{array}{rcl} u_2(1 - X) & = & 1 - 3X = \boxed{1}(1 - X) + \boxed{-2}(X - X^2) + \boxed{-2}X^2 \\ u_2(X - X^2) & = & 2 + 2X(1 - 2X) + X - X^2 = 2 + 2X - 4X^2 + X - X^2 = 2 + 3X - 5X^2 = 2(1 - X) + 5(\\ & & \\ u_2(X^2) & = & -2 + 2X.2X + X^2 = 5X^2 - 2 = -2(1 - X) - 2(X - X^2) + 3X^2 \end{array}$$

Donc la matrice de u_2 dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

3.3 *En utilisant les résultats de la partie 1, en déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de u_2 est diagonale.*
D'après la partie 1, on en déduit que

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{:=D} P^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base. On connait les trois éléments de cette nouvelle base à partir de leur composante dans cette dernière.

- Le premier a pour composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc on obtient

$$E_1 = 1(1 - X) + 1(X - X^2) + 1X^2 = 1$$

- Le second a pour composante $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc on obtient

$$E_2 = 0(1 - X) + 1(X - X^2) + 1X^2 = X$$

- Le troisième a pour composante $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc on obtient

$$E_3 = (-1)(1 - X) + (-1)(X - X^2) + 1X^2 = -1 + 2X^2$$

La nouvelle base est donc $\Big(1, X, 2X^2 - 1\Big)$.

4. *On s'intéresse dans cette question à u_3.*

3.1 *Déterminer la matrice de u_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*
La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} u_3(1) & = & 1 \\ u_3(X) & = & 2X + X = 3X \\ u_3(X^2) & = & -2 + 2X.2X + X^2 = 5X^2 - 2 \\ u_3(X^3) & = & -6X + 2X.3X^2 + X^3 = 7X^3 - 6X \end{array}$$

Donc la matrice de u_3 est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3.2 En déduire une base ainsi que la dimension de $G = \mathrm{Ker}(u_3 - 7id_{\mathbb{R}_3[X]})$.
Soit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \ker\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0_{41} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -6a - 2c & = & 0 \\ -4b - 6d & = & 0 \\ -2c & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & -\frac{3d}{2} \\ c & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\ker(u_3 - 7id_{\mathbb{R}_3[X]}) = \mathrm{Vect}\Big((-3/2X + X^3)\Big).$$

La famille $\Big(-3/2X + X^3\Big)$ constituée d'un seul polynôme est donc une famille génératrice de G, libre car composée d'un seul vecteur non nul. Par définition, c'est une base de G qui est alors de dimension 1.

3.3 *On pose : $F = \mathrm{Vect}(1, -2X, 4X^2 - 2)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.*

- La famille $(1, -2X, 4X^2 - 2)$ est une famille génératrice de F, libre car de degrés échelonnées, ne contenant pas le polynôme nul. Par définition, c'est une base de F qui est alors de dimension 3. Donc

  $\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$

- Gérons l'intersection.
  - •• D'une part, $\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \subset F \cap G$ car ce sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
  - •• D'autre part, soit $P \in F \cap G$. Alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = a - 2bX + c(4X^2-2) = 4cX^2 - 2bX + a - 2c$ et $P = d(X^3 - \frac{3}{2}X) = dX^3 - \frac{3d}{2}X$. Par identifications des coefficients, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ -2b & = & -\frac{3d}{2} \\ 4c & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

Donc $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$.

Ainsi, $\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} = F \cap G$.

Par ces deux points et par le théorème de la caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie, on en déduit que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

3.4 *En déduire une base dans laquelle la matrice de u_3 est diagonale.*

On concatène la base de F et la base de G pour obtenir une base de $\mathbb{R}_3[X]$ adaptée à ces espaces supplémentaires : $\Big(1, -2X, 4X^2-2, X^3 - (3/2)X\Big)$.

Calculons

$$\begin{array}{rcl} u_3(1) & = & 1 \\ u_3(-2X) & = & -2u_3(x) = -2 \times 3X = -6X \\ u_3(4X^2-2) & = & 4u_3(X^2) - 2u_3(1) = 4.(5X^2-2) - 2.1 = 20X^2 - 10 = 5(4X^2-2) \\ u_3(X^3 - (3/2)X) & = & 7(X^3 - (3/2)X) \end{array}$$

Donc la matrice de u_3 dans cette nouvelle base est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$$

5. On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$, où $w^{(n)}$ dérive la dérivée n-ième de w.

En particulier $H_0(x) = 1$.

4.1 *Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x), H_2(x)$ et $H_3(x)$.*

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \times -2xe^{-x^2} = 2x$$

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \times \Big(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}\Big) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = (-1)^3 e^{x^2} \times \Big(4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2}\Big) = 8x^3 - 12x$$

4.2 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= \left((-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)\right)' \\ &= (-1)^n \left(2xe^{x^2} w^{(n)}(x) + e^{x^2}\left(w^{(n)}\right)'(x)\right. \\ &= 2xH_n(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

4.3 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

i.

4.4 Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant de H_n.

6. On note v et w les applications de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définies, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$v(P) = 2XP - P', \quad w(P) = P'.$$

On admet que v et w sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$. On note par ailleurs id l'application identique de $\mathbb{R}[X]$.

5.1 *Établir : $v \circ w = u - id$ et $w \circ v = u + id$.*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$v \circ w(P) = v(w(P)) = v(P') = 2XP' - P''$$

et

$$(u - id)(P) = u(P) - id(P) = -P'' + 2XP' + P - P = -P'' + 2XP'$$

Cela montre que $v \circ w = u - id$**.**

Puis,

$$w \circ v(P) = w(2XP - P') = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P''$$

et $(u + id)(P) = u(P) + P = -P'' + 2XP' + P + P$.

Cela montre que $w \circ v = u + id$**.**

5.2 *En déduire $u \circ v - v \circ u = 2v$.*
Puis $v \circ w = u - id \Rightarrow v \circ w \circ v = (u - id) \circ v = u \circ v - v$ et $w \circ v = u + id \Rightarrow v \circ w \circ v = v \circ (u + id) = v \circ u + v \circ id = v \circ u + v$.

Donc $u \circ v - v = v \circ u + v \Leftrightarrow u \circ v - v \circ u = 2v$

5.3 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u(P) = \lambda P$, alors $u(v(P)) = (\lambda + 2)v(P)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(P) = \lambda P$. Par la question précédente

$$\begin{aligned} u(v(P)) &= v(u(P)) + 2v(P) \\ &= v(\lambda P) + 2v(P) \\ &= \lambda v(P) + 2v(P) \text{ par linéarité de } v \\ &= (\lambda + 2)v(P) \end{aligned}$$

5.4 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ H_n \in \operatorname{Ker}(u - (2n + 1)id)$.

i. Initialisation. Alors $H_0 = 1$ et $u(1) = 1 \Leftrightarrow (u-[2\times 0+1])(1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Rightarrow H_0 \in \operatorname{Ker}(u-(2\times 0+1)id)$.

ii. Hérédité. Supposons que $H_n \in \operatorname{Ker}(u - (2n + 1)id)$. Alors, on sait que

$$H_{n+1} = 2XH_n - H'_n$$

. On calcule

$$\begin{aligned} (u - (2[n + 1] + 1)id)(H_{n+1}) &= u(H_{n+1}) - (2n + 3)H_{n+1} \\ &= u(2XH_n - H'_n) - (2n + 3)(2XH_n - H'_n) \\ &= u(v(H_n)) - (2n + 3)v(H_n) \\ &= (2n + 1 + 2)v(H_n) - (2n + 3)v(H_n) \text{ par la question précédente} \\ n &= 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

Ainsi, $H_{n+1} \in \ker((u - (2[n + 1] + 1)id))$. L'hérédité est démontrée.

Par le théorème de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N},\ H_n \in \operatorname{Ker}(u-(2n+1)id)$.

PROBLÈME 2.

1. 1.1 *Pour x un réel tel que $x > 0$ montrer que la série* $\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{x}{n}+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ *est une série convergente.*

Soit $x > 0$. On cherche donc une comparaison.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{x}{n}+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) &= \left(\cancel{-\frac{x}{n}}+\cancel{\frac{x}{n}}-\frac{x^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\\ &= -\frac{x^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

Ainsi

$-\frac{x^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{x^2}{2n^2}$ puisque $x \neq 0$
la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente
par linéarité, $\sum -\frac{x^2}{2n^2}$ est une série convergente
les séries sont à termes négatifs à partir d'un certain rang.

Par le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{x}{n}+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est une série convergente.

1.2 *On note* $V_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{-x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$. *Calculer* $\ln(V_n(x))$ *puis en déduire que* $V_n(x)$ *converge.*

Les facteurs sont positifs. Par propriété de la fonction $\ln$, on a

$$\begin{aligned}\ln(V_n(x)) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(e^{-x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(e^{-x/k}\right)+\ln\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-x}{k}+\ln\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Par la question précédente, la suite $\left(\ln(V_n(x))\right)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Puisque $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la suite $\left(V_n(x)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\exp(\ell)$.

On note $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$ la limite de $V_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma_n(p) = \int_0^n t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

2.1 Justifier l'existence de $\Gamma_n(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction $t \mapsto t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Puisque p est un entier supérieur ou égal à 1 et n également, cette fonction est donc de type polynomiale par opérations usuelles sur des fonctions polynomiales.

Cette fonction est alors continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi, $\Gamma_n(p)$ existe bien.

2.2 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(p) = n^p \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n \, du.$

On effectue un changement de variables. On pose

$$u = \frac{t}{n} \Leftrightarrow t = nu = \varphi(u)$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto t^{p-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est continue,
Si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = n$ alors $u = 1$,
$\frac{dt}{du} = \frac{d(nu)}{du} = n$

Par théorème

$$\begin{aligned} \Gamma_n(p) &= \int_0^1 (nu)^{p-1}(1-u)^n \times n \, du \\ &= \boxed{n^p \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n} du \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.

3. On pose : $I_{p,n} = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n \, du.$

3.1 *Calculer* $I_{p,0}$.

$$\begin{aligned} I_{p,0} &= \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^0 \, du \\ &= \int_0^1 u^{p-1} \, du = \left[\frac{u^p}{p}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

3.2 *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :* $\forall (n;\ p) \in, (\mathbb{N}^*)^2,\ I_{p,n} = \frac{n}{p} I_{p+1,n-1}.$

Soit $(n;\ p) \in, (\mathbb{N}^*)^2$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(u) &=& (1-u)^n \\ \psi'(u) &=& u^{p-1} \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi'(u) &=& -n(1-u)^{n-1} \\ \psi(u) &=& \frac{u^p}{p} \end{array} \right.$$

Ces fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème d'intégration par parties, on en déduit :

$$\begin{aligned} I_{p,n} &= \left[\frac{u^p}{p} \times (1-u)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^p}{p} \times \Big(-n(1-u)^{n-1}\Big) \, du \\ &= \frac{n}{p} \int_0^1 u^p (1-u)^{n-1} \, du \ \text{ par linéarité} \\ &= \boxed{\frac{n}{p} I_{p+1,n-1}} \end{aligned}$$

3.3 *En déduire* $\forall (n;\ p) \in, (\mathbb{N}^*)^2$, $I_{p,n} = \dfrac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}$.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors

$$I_{p,n} = \frac{n}{p} I_{p+1,n-1} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p+1} I_{p+2,n-2} = \cdots = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{p \times (p+1) \times \cdots \times (p+n-1)} I_{p+n,0}$$

Par la question 31, on en déduit que

$$\boxed{I_{p,n} = \frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}}$$

3.4 *Montrer que :* $\forall (n;\ p) \in, (\mathbb{N}^*)^2,\ \dfrac{p(p+1)\dots(p+n)}{n!} = p\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{p}{k}\right)$.

On peut partir de la droite :

$$\begin{aligned} p\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{p}{k}\right) &= p\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+p}{k}\right) \\ &= p\tfrac{\prod_{k=1}^{n}[k+p]}{\prod_{k=1}^{n}k} \\ &= p\times\tfrac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!} \\ &= \boxed{\frac{p(p+1)\dots(p+n)}{n!}} \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\varphi\begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t} \end{cases}$.

4.1 *Montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$. On note encore φ le prolongement obtenu.*

- D'une part, φ est continue sur $]0;1]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

- De plus,

$$\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1-\Big[1-nt+o(t)\Big]}{t} \underset{t\to 0}{=} n+o(1)$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = n \in \mathbb{R}$.

Par propriété, φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ et en notant encore φ le prolongement obtenu, on a désormais :

$$\boxed{\varphi\begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{matrix} \dfrac{1-(1-t)^n}{t} & \text{si} & t \in]0;1] \\ n & \text{si} & t=0 \end{matrix} \end{cases}.}$$

4.2 *L'application φ est-elle de classe C^1 sur $[0,1]$?*
L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

- Testons si φ est dérivable en 0. Pour cela,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\underset{t\to 0}{=} \tfrac{1-\left(1-nt+\frac{n(n-1)}{2}[-t]^2+o(t^2)\right)}{t} \\ &\underset{t\to 0}{=} n-\tfrac{n(n-1)}{2}t+o(t) \end{aligned}$$

Puisque φ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1, par propriété, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\frac{n(n-1)}{2}$.

- Testons si φ' est continue en 0. Pour cela, $\forall t > 0$

$$\varphi'(t) = \frac{t \times \Big(n(1-t)^{n-1}\Big) - 1 \times \Big(1-(1-t)^n\Big)}{t^2}$$

Traitons le numérateur :

$$\begin{aligned}
& t \times \Big(n(1-t)^{n-1}\Big) - 1 \times \Big(1-(1-t)^n\Big) \\
\underset{t\to 0}{=} \quad & nt\Big(1-[n-1]t+o(t)\Big) - \Big(1-\Big(1-nt+\tfrac{n(n-1)}{2}[-t]^2+o(t^2)\Big) \\
\underset{t\to 0}{=} \quad & \cancel{nt} - n(n-1)t^2 + o(t^2) - \Big(\cancel{nt} - \tfrac{n(n-1)}{2}t^2 + o(t^2)\Big) \\
\underset{t\to 0}{=} \quad & -\tfrac{n(n-1)t^2}{2} + o(t^2)
\end{aligned}$$

Finalement, par quotient d'équivalents, $\varphi'(t) \sim_{t\to 0} \frac{-n(n-1)}{2}$. Donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = \dfrac{-n(n-1)}{2} = \varphi'(0)$. La fonction φ' est donc continue en 0 et φ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

4.3 *À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliquée à $f : x \mapsto 1-(1-x)^n$, montrer que $\forall t \in [0;\ 1], 0 \leq \varphi(t) \leq n$.*

La fonction f est de type polynomiale, donc est dérivable sur $[0;1]$. De plus,

$$\forall x \in [0;1], f'(x) = (-1) \times (-n)(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}$$

Donc

$$0 \leq f'(x) \leq n.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que $\forall t \in [0;1], 0 \times (t-0) \leq f(t) - f(0) \leq n \times (t-0) \Leftrightarrow 0 \leq f(t) \leq nt$

i. Si $t > 0$ alors $0 \leq \varphi(t) \leq n$

ii. Si $t = 0$ alors $\varphi(0) = n \in [0;n]$.

Par conséquent, on a montré que $\forall t \in [0;\ 1], 0 \leq \varphi(t) \leq n$.

5. On note $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\, dt$.

5.1 *Justifier que I_n et J_n sont bien définies.*

La fonction $t \mapsto \varphi\left(\frac{t}{n}\right)$ est continue sur $[0;1]$ puisque φ est continue sur $[0;1]$. Cela justifie que I_n existe. De plus, $t \mapsto \dfrac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}$ est continue sur $[1;n]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1;n]$. Cela justifie que J_n existe.

5.2 *Montrer, en vous aidant d'un changement de variable que :* $J_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \frac{(1-u)^n}{u}\, du.$

On pose $\frac{t}{n} = u \Leftrightarrow t = nu = \psi(u)$.

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \dfrac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}$ est continue sur $[1;n]$
Si $t=1$ alors $u = 1/n$ et si $t=n$ alors $u=1$,
$\frac{dt}{du} = \frac{d(nu)}{du} = n$

Par théorème,

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}\, dt \\
&= \int_{1/n}^{1} \frac{(1-u)^n}{\cancel{n}u} \times \cancel{n}\, du \\
&= \boxed{\int_{1/n}^{1} \frac{(1-u)^n}{u}\, du}
\end{aligned}
$$

5.3 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n} \left(\frac{(1-u)^{n+1}}{u} - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}} \right) du.$

Partons de :

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/(n+1)}^{1/n} \left(\frac{(1-u)^{n+1}}{u} - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}} \right) du \\
&= \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{(1-u)^{n+1}}{u}\, du - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}} \text{ par linéarité} \\
&= \int_{1/(n+1)}^{1} \frac{(1-u)^{n+1}}{u}\, du + \int_{1}^{1/(n)} \frac{(1-u)^{n+1}}{u}\, du - \frac{1}{\cancel{n}(n+1)} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\cancel{n}}} \text{ par Chasles} \\
&= J_{n+1} + \int_{1}^{1/(n)} (1-u)\frac{(1-u)^{n}}{u}\, du - \frac{1}{\cancel{n}(n+1)} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\cancel{n}}} \text{ par Chasles}
\end{aligned}
$$

Prélevons :

$$\begin{aligned}\int_1^{1/(n)}(1-u)\frac{(1-u)^n}{u}\,du &= \int_1^{1/(n)} 1\times\frac{(1-u)^n}{u}\,du - \int_1^{1/(n)} u\times\frac{(1-u)^n}{u}\,du \text{ par linéarité}\\ &= -J_n - \left[\tfrac{-(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\ &= -J_n + \Big((1-1/n)^{n+1}/(n+1) - 0\Big)\end{aligned}$$

On revient à l'expression précédente :

$$J_{n+1}+\int_1^{1/(n)}(1-u)\frac{(1-u)^n}{u}\,du-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1} = J_{n+1}-J_n+\frac{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{n+1}-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1} = J_{n+1}-J_n$$

On a donc montré que $J_{n+1}-J_n = \displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n}\left(\frac{(1-u)^{n+1}}{u}-\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}}\right)du$**.**

.

5.4 *Étudier le sens de variations de* $g : u \mapsto \dfrac{(1-u)^{n+1}}{u}$ *sur* $]0;\ 1]$ *et en déduire que* (J_n) *est décroissante.*

Cette fonction g est dérivable sur $]0;1]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas et sa fonction est

$$\forall u \in]0;1], g'(u) = \frac{u\times(-[n+1])(1-u)^n-(1-u)^{n+1}}{u^2} = -\Big(\frac{u\times[n+1](1-u)^n+(1-u)^{n+1}}{u^2}\Big) \leq 0$$

puisque les termes dans la parenthèse sont positifs, et donc leur somme l'est aussi. Donc g est décroissante. Reprenons donc l'expression précédente. Alors pour tout $u\in[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}], g(t)\leq g(\frac{1}{n}) \Leftrightarrow g(t)-g(\frac{1}{n})\leq 0$. Par positivité de l'intégrale, et puisque $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$, on a $J_{n+1}-J_n\leq 0$.

Ainsi, la suite (J_n) est décroissante.

5.5 Finalement, montrer que (J_n) converge. *On admet dans la suite du devoir que (I_n) converge également*.
Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $\forall t\in \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t}$ est positive et $0\leq n$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive donc minorée par 0, décroissante par la question précédente.

Par le théorème des suites monotones, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $a_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln(n)$.

6.1

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (1-t)^{k-1}\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (1-t)^{k-1}\, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^{k}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{1-[1-t]}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\, dt \\
&= \int_0^n \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{\frac{u}{n}} \times \frac{1}{n}\, du
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\, du - \ln(n) \\
&= \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\, du - \int_1^n \frac{1}{u}\, du
\end{aligned}$$

6.2 On remarque que

$$\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{n} \int_0^n \varphi(\tfrac{u}{n})\, du - \int_1^n \tfrac{1}{u}\, du \\
&= \tfrac{1}{n} \int_0^1 \varphi(\tfrac{u}{n})\, du + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\, du - \int_1^n \tfrac{1}{u}\, du \\
&= \tfrac{1}{n} \int_0^1 \varphi(\tfrac{u}{n})\, du + \int_1^n \varphi(\tfrac{u}{n}) - \tfrac{1}{u}\, du \\
&= \tfrac{1}{n} \int_0^1 \varphi(\frac{u}{n})\, du - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\, du
\end{aligned}$$

6.3 En déduire que (a_n) converge. On note γ sa limite dans la suite du devoir.
On remarque que $a_n = I_n - J_n$. Les suites (I_n) et (J_n) convergent d'après les questions précédentes.

Donc la suite (a_n) converge par opérations usuelles.

7. 7.1 *Simplifier l'expression :* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)$ *puis montrer que :*

$$p e^{p a_n} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right) = \frac{p(p+1)\dots(p+n)}{n^p n!}.$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-p/k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{p}{k}\right)=e^{-p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!}$$

Donc

$$\begin{aligned}
pe^{pa_n}\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right) &= pe^{pa_n-p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\times\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!}\\
&= e^{-p\ln(n)}\times\frac{p(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!}\\
&= e^{\ln(n^{-p})}\times\frac{p(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!}\\
&= \frac{p(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^p}
\end{aligned}$$

7.2 Soit $p\in\mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n^pn!}$ converge et préciser la valeur de sa limite.

On sait que la suite (a_n) converge vers γ. Par continuité de $\exp$, on en déduit que

$$e^{pa_n}\to_{n\to+\infty}e^{p\gamma}$$

De plus, par la question 12,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)\to_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)$$

Par produit de limites, on en déduit que la suite de terme général $\dfrac{p(p+1)\ldots(p+n)}{n^pn!}$ **converge et que sa limite est** $pe^{p\gamma}\times\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$.

.

7.3 *En déduire l'existence de* $\lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma_n(p)$*. On note* $\Gamma(p)$ *cette limite.*

On a

$$\Gamma_n(p)=n^pI_{p,n}=n^p\times\frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}$$

Par la question précédente, et par passage à l'inverse (licite puisque les nombres sont strictement positifs et la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(p)=\frac{e^{-p\gamma}}{p\times\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-p/k}\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)}}$$

7.4 On remplace l'expression de $\Gamma_n(p)$ par son intégrale pour obtenir

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,dt=\frac{e^{-\gamma p}}{p\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-p/n}\left(1+\frac{p}{n}\right)\right)}.}$$