Concours commun blanc de Mathématiques

Lycée Antoine Bourdelle & Lycée Déodat de Severac

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

AVERTISSEMENTS :

- Pensez à rendre séparément les parties analyse et algèbre.
- Le barême final accordera le même poids à l'exercice d'analyse et à l'exercice d'algèbre linéire.

EXERCICE D'ANALYSE

Partie 1. Une somme de rationnels approchant le nombre $\ln(2)$.

(Q 1) Montrer que pour tout $t \neq -1$, et tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

(Q 2) En déduire que $\forall n \geq 1$,

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

(Q 3) Montrer que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Partie 2. Une seconde somme de rationnels approchant le nombre $\ln(2)$.

(Q 1) Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \ln(1+t) + \ln(t)$ définie sur $[1; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f sans oublier les limites aux bords de l'intervalle.

(Q 2) Calculer une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ et en déduire qu'une primitive sur $[1; +\infty[$ de f est

$$F : x \mapsto \Big(1+x\Big)\Big(\ln(x) - \ln(1+x)\Big)$$

(Q 3) Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} -1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$.

(Q 4) Montrer qu'il existe un réel M tel que $\forall x \geq 1, F(x) \leq M$.

(Q 5) Soit $\forall n \geq 1, H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge.

(Q 6) En utilisant la méthode des rectangles, que l'on illustra par un schéma, montrer que : $\forall p \geq 2, \forall q \geq p$:

$$F(q+1) - F(p) \leq \sum_{k=p}^{q} f(k) \leq F(q) - F(p-1)$$

(Q 7) Étude de la convergence de $\sum_{k\geq 1} f(k)$.

(a) Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

(b) En utilisant la question 4, montrer que $\forall n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \Big(1 - \ln(2)\Big) + M - F(1)$$

(c) En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} f(k)$ converge. On note γ sa somme.

(d) En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + o(1)$.

(Q 8) Soit $n \geq 1, N > n$. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} f(k) = \sum_{k=1}^{N} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$, montrer que :

$$-1 - F(n+1) \leq \gamma - \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq -1 - F(n)$$

(Q 9) Montrer que $-1-F(n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}$.

(Q 10) En déduire que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1)+\gamma+\frac{-1}{2n}+o(\frac{1}{n})$$

(Q 11) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$.

(Q a) Donner le domaine de définition de g. On le note $\mathcal{D}_g$.

(Q b) Étudier la convergence de la série de terme général $(g(n))_{n\geq 1}$.

(Q c) Trouvez $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}_g, g(x) = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{2x+1}$.

(Q d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

(Q e) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = 3+4H_n-4H_{2n+1}+\frac{1}{n+1}.$$

(Q f) En utilisant le résultat de la question 7d, montrer que

$$\boxed{\ln(2) = \frac{1}{4}\Big(3-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}\Big)}$$

EXERCICE D'ALGÈBRE LINÉAIRE

On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille (n,n) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille (n,p).
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $a_{i,j}$ le coeficient de A situé à l'intersection de la i-ème ligne et j-ème colonne.
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors : $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A.
- id l'application identité sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Pour f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ou $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Pour $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ ou $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(X)$ la matrice des composantes de X dans $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs exprimés dans $\mathcal{C}$. On rappelle que le produit scalaire a pour expression : $< X, Y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On dit que f est un <u>endomorphisme symétrique</u> lorsque : $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^3, < f(X), Y >=< X, f(Y) >$.

I - Quelques généralités sur les endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que si X et Y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $< X, Y >= X^TY$.

2. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ alors l'endomorphisme f canoniquement associé à A est un <u>endomorphisme symétrique</u>.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée quelconque et $X \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} < X, e_1 > \\ < X, e_2 > \\ < X, e_3 > \end{pmatrix}$.

4. Pour f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée, on note $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$.

Vérifier qu'alors $a_{j,i} = < f(e_i), e_j >$ puis que si f est un endomorphisme symétrique alors $A^T = A$.

II - Un exemple pour $n = 3$.

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on note φ l'application telle que $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$ et on note $P_0 = 2X^2$, $P_1 = \sqrt{2}X$, $P_2 = 1 - 2X^2$.

5. Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

6. Vérifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. Déterminer $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et vérifier que A est une matrice symétrique. On pourra utiliser $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer une base et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}(\varphi + 3id)$, $\mathrm{Ker}(\varphi + 8id)$.

9. En déduire une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ a pour expression : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

III - Le cas général pour $n = 2$

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On suppose que $A \neq 0_2$ et on veut montrer que quels que soient les réels a, b et c il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

10. Montrer que $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0_2$ avec $\alpha = a + c$ et $\beta = ac - b^2$.

11. On suppose $\beta = 0$.

(a) Vérifier que $\alpha \neq 0$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) \subset \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A - \alpha I_2) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) = \mathbb{R}^2$.

(e) En déduire une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale. Préciser D.

12. On suppose : $\beta \neq 0$.

(a) Montrer que $\alpha^2 - 4\beta \geq 0$ et étudier le cas où $\alpha^2 - 4\beta = 0$.

Dans la suite de la partie on supposera que : $\alpha^2 - 4\beta > 0$ et on pose : $B = \dfrac{2A - \alpha I_2}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}$. On note également g l'endomorphisme canoniquement associé à B.

(b) Calculer B^2. Qu'en déduit-on pour g ?

(c) En vous aidant des éléments caractéristiques de g (sans chercher à les calculer) proposer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle $D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g)$ est diagonale.

(d) En déduire que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est également diagonale.

IV - Retour sur l'endomorphisme de II-.

On utilise dans cette partie la notation suivante : si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels on note :
$(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1 - t^2}\, dt$.

On note, comme dans la partie II, $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.
On note $T_0 = 1$, $T_1 = 2X$ et $T_2 = 4X^2 - 1$.

13. Montrer que : $\sin(\theta)T_1(\cos(\theta)) = \sin(2\theta)$ et $\sin(\theta)T_2(\cos(\theta)) = \sin(3\theta)$.

Plus généralement on pose : $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sin(\theta)T_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$.

14. Vérifier que $T_3 = 8X^3 - 4X$ et que $T_3 \in \mathrm{Ker}(\varphi + 15id)$.

15. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, on note $f(t) = (1-t^2)^{3/2}P'(t)$. Montrer que $f'(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(P)(t)$.

16. En déduire que : $(\varphi(P)|Q) = -\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{3/2}P'(t)Q'(t)\,dt$ puis $(\varphi(P)|Q) = (P|\varphi(Q))$.

17. Démontrer que : $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$. En déduire , à l'aide du changement de variable : $t = \cos(\theta)$ que :

$$(T_n|T_m) = 0 \text{ si } m \neq n \quad (T_n|T_n) = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE D'ANALYSE

Partie 1. Une somme de rationnels approchant le nombre $\ln(2)$.

(Q 1) *Montrer que pour tout $t \neq -1$, et tout entier $n \geq 1$:*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

D'après la propriété sur les sommes des termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$, on sait que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-((1)^n t^n}{1+t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}}}$$

(Q 2) *En déduire que $\forall n \geq 1$,*

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

On intègre et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 t^k\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt}$$

(Q 3) *Montrer que* $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On étudie :

$$\begin{aligned} \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| &\leq \text{par inégalité triangulaire} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \\ &\leq \text{par croissance de l'intégrale} \int_0^1 \frac{t^n}{1+0}\,dt \\ &\leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de l'encadrement, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$. **Par conséquent, la suite** $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1}\right)_{n\geq 0}$ **converge vers** $\ln(2)$. **Par le théorème des suites extraites,** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2)$.

Par définition, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

Partie 2. Une seconde somme de rationnels approchant le nombre $\ln(2)$.

(Q 1) *Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \ln(1+t) + \ln(t)$ définie sur $[1;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f sans oublier les limites aux bords de l'intervalle.*

Cette fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ par opérations élémentaires de fonctions qui le sont. De plus, $\forall t \geq 1$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t^2} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} \\ &= \frac{-[t+1]-t^2+t[t+1]}{t^2(t+1)} = \boxed{\frac{-1}{t^2(t+1)}} \end{aligned}$$

De plus, $f(1) = 1 - \ln(2)$ et

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x}) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On obtient donc comme tableau de variations :

x	1 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$1-\ln(2) \searrow 0$

(Q 2) *Calculer une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ et en déduire qu'une primitive sur $[1;+\infty[$ de f est*

$$F : x \mapsto \Big(1+x\Big)\Big(\ln(x) - \ln(1+x)\Big)$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de $\ln$ est la fonction qui à $x \geq 1$ associe $\int_1^x \ln(t)\,dt$. On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & ; \quad u(t) = t \\ v(t) = \ln(t) & ; \quad v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)\,dt &= \Big[t\ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt \\ &= x\ln(x) - (x-1) \end{aligned}$$

Une primitive de $\ln$ sur $[1;+\infty[$ est la fonction qui à x associe $x\ln(x)-x+1$.
De plus, par linéarité,
une primitive de f est $x\mapsto \ln(x)-\Big([x+1]\ln(x+1)-[x+1]+1\Big)+x\ln(x)-x+1$, autrement dit $x\mapsto(1+x)\Big(\ln(x)-\ln(1+x)\Big)+1$. Puisque les primitives d'une fonction sont égales à une constante près, on en déduit que $x\mapsto(1+x)\Big(\ln(x)-\ln(1+x)\Big)$ en est une.

(Q 3) *Montrer que* $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} -1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$.

Partons de

$$\begin{aligned}
F(x) &= -(1+x)\ln(1+\tfrac{1}{x})\\
&\underset{x\to+\infty}{=} -(1+x)\Big(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{2x^2}+o\Big(\tfrac{1}{x^2}\Big)\Big)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} -1+\Big(-1+\tfrac{1}{2}\Big)\times\tfrac{1}{x}+o\Big(\tfrac{1}{x}\Big)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \boxed{-1-\frac{1}{2x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)}
\end{aligned}$$

(Q 4) *Montrer qu'il existe un réel M tel que $\forall x\geq 1, F(x)\leq M$.*
La fonction F est une primitive de f, donc $F'=f\geq 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-1$ par la question précédente. On obtient donc comme tableau de variations :

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
F	$-2\ln(2)$ $\nearrow$	-1

Ainsi,
$\forall x\geq 1, F(x)\leq -1$.

(Q 5) **Soit $\forall n\geq 1, H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge.**

Puisque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $\alpha=1\leq 1$, on sait que la série diverge et donc que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ et est donc une suite divergente.

(Q 6) *En utilisant la méthode des rectangles, que l'on illustra par un schéma, montrer que :* $\forall p\geq 2, \forall q\geq p$:

$$F(q+1)-F(p)\leq\sum_{k=p}^{q}f(k)\leq F(q)-F(p-1)$$

Puisque f est une fonction décroissante, on sait que

$$\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt$$

Puis, sommons :

$$\sum_{k=p}^{q}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq\sum_{k=p}^{q}f(k)\leq\sum_{k=p}^{q}\int_{k-1}^{k}f(t)\,dt$$

Par Chasles :

$$\int_p^{q+1}f(t)\,dt\leq\sum_{k=p}^{q}f(k)\leq\int_{p-1}^{q}f(t)\,dt$$

Puisque F est une primitive de f, on en déduit

$$\Big[F(t)\Big]_p^{q+1}\leq\sum_{k=p}^{q}f(k)\leq\Big[F(t)\Big]_{p-1}^{q}$$

Finalement $F(q+1)-F(p)\leq\sum_{k=p}^{q}f(k)\leq F(q)-F(p-1)$.

(Q 7) **Étude de la convergence de $\sum_{k\geq 1}f(k)$.**

(a) *Montrer que $\Big(\sum_{k=1}^{n}f(k)\Big)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.*
On a

$$\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(n+1)\geq 0$$

puisque f est positive.
La suite $\Big(\sum_{k=1}^{n}f(k)\Big)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

(b) *En utilisant la question 4, montrer que $\forall n\geq 2$*

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\leq\Big(1-\ln(2)\Big)+M-F(1)$$

En utilisant la question 6 avec $p=2$ et $q=n\geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n}f(k)\leq F(n)-F(1)$$

Or $F(n) \leq M$ par la question 4. Et puisque $f(1) = 1 - \ln(2)$, on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq 1 - \ln(2) + M - F(1)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) *En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} f(k)$ converge. On note γ sa somme.*

Puisque la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et majorée, on en déduit par le théorème des suites monotones, que la suite converge.
Par définition, la série $\sum_{k\geq 1} f(k)$ converge. On note γ sa somme.

(d) *En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + o(1)$.*

La série converge et sa somme est notée γ. Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_{n\geq 1}$ converge. Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\\ &=_{\text{par linéarité}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big)\\ &=_{\text{par téléscopage}} H_n - \ln(n+1) + \ln(1)\\ &= \boxed{H_n - \ln(n+1)}\end{aligned}$$

Ainsi $H_n - \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$
et $H_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n+1) + \gamma + o(1)$.

(Q 8) *En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} f(k) = \sum_{k=1}^{N} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)$, montrer que :*

$$-1 - F(n+1) \leq \gamma - \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq -1 - F(n)$$

On reprend le résultat de la question 6 avec $p = n+1 \geq 2$ et $q = N > n$. On a

$$F(N+1) - F(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq F(N) - F(n)$$

Puis, d'après la remarque précédente, on en déduit que

$$F(N+1) - F(n+1) \leq \sum_{k=1}^{N} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq F(N) - F(n)$$

Puis, par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, et puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} F(N+1) = \lim\limits_{N\to+\infty} F(N) = -1$, on a :
$-1 - F(n+1) \leq \gamma - \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq -1 - F(n)$.

(Q 9) *Montrer que $-1 - F(n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}$.*
Par la question 3,

$$-1 - F(n) \underset{n\to+\infty}{=} -1 - \Big(-1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\Big) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow -1 - F(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

(Q 10) **En déduire que :**

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + \frac{-1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

On a, d'après la question précédente :

$$-1 - F(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Par le théorème de l'encadrement,

$$\gamma - \sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Ainsi,

$$\gamma - \Big(H_n - \ln(n+1)\Big) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Finalement, $H_n =_{n\to+\infty} \ln(n+1) + \gamma - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$.

(Q 11) **Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$.**

(Q a) *Donner le domaine de définition de g. On le note $\mathcal{D}_g$.*
Le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{0; -1; -1/2\}$.

(Q b) *Étudier la convergence de la série de terme général $(g(n))_{n\geq 1}$.*
On a :

$g(n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^3}$
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ **converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$. Les suites sont à termes positifs.**

Par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} g(n)$ converge.

(Q c) *Trouvez $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathcal{D}_g, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$.*

- **Pour** a :
$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)} = \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{2x+1}$$
Puis, on fait tendre x **vers** 0 **et on a** $1 = a$**.**
- **Pour** b **:**
$$\frac{1}{x(2x+1)} = \frac{a(x+1)}{x} + b + \frac{c(x+1)}{2x+1}$$
Puis, on fait tendre x **vers** -1 **et on a** $b = 1$**.**
- **Pour** c **:**
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(2x+1)}{x} + \frac{b(2x+1)}{x+1} + c$$
Puis, on fait tendre x **vers** $-1/2$ **et on a** $c = -4$**.**

Finalement $g(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$**.**

(Q d) ***Montrer que, pour tout entier naturel non nul*** n ***:***
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

Partons de
$$H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$
Or $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$**, puisqu'un entier est soit pair, soit impair.**
Finalement, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n$.

(Q e) ***Montrer que***
$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = 3 + 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

On utilise la décomposition en éléments simples précédentes :
$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}$$
Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ **et** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} =_{\text{par glissement d'indice}} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_n + \frac{1}{n+1} - 1$**. Enfin,** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - 1 = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$.
Finalement, $\sum_{k=1}^{n} g(k) = H_n + H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - 4\Big(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1\Big) = 3 + \frac{1}{n+1} + 4\Big(H_n - H_{2n+1}\Big)$**.**

(Q f) ***En utilisant le résultat de la question 7d, montrer que***
$$\boxed{\ln(2) = \frac{1}{4}\Big(3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}\Big)}$$

En utilisant 7d, on a
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = 3 + 4\Big(\ln(n+1) + \cancel{\gamma} + o(1) - \ln(2n+2) - \cancel{\gamma} + o(1)\Big) + \frac{1}{n+1}$$

Or $\ln(n+1) - \ln(2n+2) = \ln\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$**. Or** $\frac{n+1}{2n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}$**. Ainsi, par continuité de** $\ln$ **et par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que :** $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(2n+2) = -\ln(2)$. **Finalement,**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\Big(3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}\Big) = \ln(2)$$
Et ainsi,
$$\boxed{\ln(2) = \frac{1}{4}\Big(3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}\Big)}$$

EXERCICE D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1. **Notons :** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **et** $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$**. Alors :** $X^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ **donc par calcul matriciel :** $X^TY = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 =< X, Y >$**.**
2. **Soit** $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ **et** f **l'endomorphisme canoniquement associé. Alors :** $f(X) = AX$ **et donc :** $< f(X), Y >= (AX)^TY = X^TA^TY$**. Comme** A **est symétrique** $A^T = A$**. On en déduit alors :** $< f(X), Y >= X^TAY$**. Par ailleurs :** $X^TAY = X^Tf(Y)$ **donc :** $X^TAY =< X, f(Y) >$ **toujours d'après la première question. Au final, cela prouve que :** $< f(X), Y >=< X, f(Y) >$ **quels que soient** X **et** Y**. Par définition, cela prouve que** f **est symétrique.**
3. **On écrit** $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ **la décomposition du vecteur** X **dans la base orthonormée** $\mathcal{B}$**. Alors :** $< X, e_1 >=< x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, e_1 >= x_1 < e_1, e_1 > +x_2 < e_2, e_1 > +x_3 < e_3, e_1 >$ **par propriété de bilinéarité. Or** $\mathcal{B}$ **est orthonormale donc :** $< e_1, e_1 >= 1$**,** $< e_1, e_2 >= 0$ **et** $< e_1, e_3 >= 0$**. Par conséquent :** $x_1 =< X, e_1 >$**. De la même façon nous obtenons** $x_2 =< X, e_2 >$ **et** $x_3 =< X, e_3 >$**. Puisque par notation :** $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **nous avons bien au final :**
$$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} < X, e_1 > \\ < X, e_2 > \\ < X, e_3 > \end{pmatrix}}.$$

4. **Par définition de** A, $\forall i \in [\![1;\ 3]\!]$, $f(e_i) = a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + a_{3,i}e_3$, **avec** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. **Or d'après la question précédente, puisque** $\mathcal{B}$ **est orthonormale :** $a_{i,1} =< f(e_i), e_1 >$, $a_{i,2} =< f(e_i), e_2 >$ **et** $a_{i,3} =< f(e_i), e_3 >$. **Par conséquent, quels que soient** i **et** j **:** $\boxed{a_{j,i} =< f(e_i), e_j >}$ **ce qu'il fallait démontrer.**

On en déduit $a_{i,j} =< f(e_j >, e_i >$. **Or** f **est un endomorphisme symétrique par hypothèse. Ainsi,** $< f(e_j >, e_i >=< e_j, f(e_i) >$. **On constate alors que :** $< e_j, f(e_i) >=< f(e_i), e_j >= a_{j,i}$. **Nous avons donc** $\boxed{a_{i,j} = a_{j,i}}$ **quels que soient** i **et** j **ce qui prouve que** $\boxed{A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).}$

5. **Par propriété du degré on constate que si** $P \in \mathbb{R}_2[X]$, **alors :** $\boxed{\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X].}$ **De plus, si** $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ **et** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, **alors :** $\varphi(\lambda P + \mu Q) = (1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)' - 3X\lambda P + \mu Q)'$. **Or par propriété de la dérivation :** $(\lambda P + \mu Q)'' = \lambda P'' + \mu Q"$ **et** $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$. **On en déduit :** $\boxed{\varphi(\lambda P + \mu Q)} = \lambda((1-X^2)P'' - 3XP') + \mu((1-X^2)Q'' - 3XQ' = \boxed{\lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).}$

Les deux points précédents étant vérifiés, on en déduit que $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]).}$

6. **Soient** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **tel que :** $aP_0 + bP_1 + cP_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. **Alors :** $c + b\sqrt{2}X + 2(a - c)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. **Par identification, on en déduit :** $c = 0, b = 0\ 2(a - c) = 0$ **donc** $a = b = c = 0$. **La famille est donc** __**libre**__. **Elle est de plus de** __**taille maximale**__ **car constituée de** 3 **éléments ce qui correspond à la dimension de** $\mathbb{R}_2[X]$. **Par propriété il s'agit donc d'une** __**base**__ **de** $\mathbb{R}_2[X]$.

Nous avons $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$

7. **Notons** B **la matrice de** φ **dans la base canonique. Par calcul :** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. **Donc d'après les formules de changement de base :**

$\boxed{A = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$ **par calcul matriciel. On constate en effet que** __$A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.__

8.
- **Soit** $P = a + bX + cX^2$. **Alors :** $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow (1 - X^2)P'' - 3XP' = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow -8cX^2 - 3bX + 2c = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. **Nous avons donc** $b = c = 0$ **ce qui amène** P **constant. On en déduit :** $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1).}$ **La famille constituée du polynôme** 1 **est donc une base et l'espace vectoriel est de dimension** 1.
- **Soit** $P = a + bX + cX^2$. **Alors :** $P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 3id) \Leftrightarrow \varphi(P) + 3P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow ((1 - X^2)P'' - 3XP' + 3P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow -5cX^2 + 2c + 3a = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. **Nous avons donc** $a = c = 0$ **ce qui amène** $P = bX$ **avec** b **quelconque. On en déduit :** $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi + 3id) = \mathrm{Vect}(X).}$ **La famille constituée du polynôme** X **est donc une base et l'espace vectoriel est de dimension** 1.
- **Soit** $P = a + bX + cX^2$. **Alors :** $P \in \mathrm{Ker}(\varphi + 8id) \Leftrightarrow \varphi(P) + 8P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow ((1 - X^2)P'' - 3XP' + 8P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow +5bX + 2c + 8a = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. **Nous avons donc** $c = -4a$ **ce qui amène** $P = a(1 - 4X^2)$ **avec** a **quelconque. On en déduit :** $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi + 8id) = \mathrm{Vect}(1 - 4X^2).}$ **La famille constituée du polynôme** $1 - 4X^2$ **est donc une base et l'espace vectoriel est de dimension** 1.

9. **Notons** $\mathcal{B}' = (1, X, 1 - 4X^2)$. **Alors :** $\mathcal{B}'$ **est de degrés échelonnés donc est libre. Elle est de plus de taille maximale donc est une base de** $\mathbb{R}_2[X]$. **De plus :** $\varphi(1) = 0$ **car** $1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\varphi(X) = -3X$ **car** $X \in \mathrm{Ker}(\varphi + 3id)$ **et** $\varphi(1 - 4X^2) = -8(1 - 4X^2)$ **car** $1 - 4X^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi + 8id)$. **Par conséquent :**

$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.}$

10. **Par calcul matriciel élémentaire** $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0_2$ **avec** $\alpha = a + c$ **et** $\beta = ac - b^2$.

11. **(a)** **On suppose** $\beta = 0$. **Alors, par l'absurde, si** $\alpha = 0$ **cela donne :** $a = -c$ **et** $-(c^2 + b^2) = 0$. **Une somme de carrés étant toujours positive cela entraîne** $c = b = 0$. **Or** $a = -c$ **don** $a = 0$. **On en déduit que** $A = 0_2$ **ce qui est contraire à l'hypothèse.**

(b) **Dans cette question :** $A^2 - \alpha A = 0_2$ **puisque** $\beta = 0$.

- **Soit** $X \in \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)$. **Alors :** $AX = \alpha X$ **donc :** $X = AY$ **avec** $Y = \dfrac{1}{\alpha}X$ **ce qui prouve que** $X \in \mathrm{Im}(A)$.
- **Soit** $X \in \mathrm{Im}(A - \alpha I_2)$. **Alors :** $X = (A - \alpha I_2)Y = AY - \alpha Y$ **donc :** $AX = (A^2 - \alpha A)Y = 0_{\mathbb{R}^2}$ **ce qui prouve que** $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

(c) **Par double inclusion :**

- $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \subset Ker(A) \cap \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)$ **est évident car un sous-espace vectoriel admet toujours le vecteur nul comme élément.**
- $Ker(A) \cap \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) \subset \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. **Soit** $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)$. **Alors :** $AX = 0_{\mathbb{R}^2}$ **et** $AX = \alpha X$. **Ainsi :** $\alpha X = 0_{\mathbb{R}^2}$. **Puisque** $\alpha \neq 0$ **d'après précédemment.**

(d) **D'après (c)** $\boxed{Ker(A) \cap \mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.}$

De plus d'après (a) : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) \leq \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$. **Or d'après le théorème du rang :** $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. **Ainsi :** $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)) \leq 2$.

De même toujours d'après (a) : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2) \geq \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)) + \dim(\mathrm{Im}(A - \alpha I_2))$. **Or d'après le théorème du rang :** $\dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)) + \dim(\mathrm{Im}(A - \alpha I_2)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)) + \mathrm{rg}(A - \alpha I_2) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. **Ainsi :** $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A - \alpha I_2)) \geq 2$.

Les deux inégalités étant prouvées, on en déduit que : $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)) = 2.}$

Les deux points précédents étant vérifiés, par caractérisation des supplementaires en dimension finie on en déduit : $\boxed{Ker(A) \oplus \mathrm{Ker}(A-\alpha I_2) = \mathbb{R}^2.}$

(e) **Par supplémentarité si** $\mathcal{B}_1$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(A)$ **et** $\mathcal{B}_2$ **est une base de** $\mathrm{Ker}(A-\alpha I_2)$ **on obtient alors une base de** $\mathbb{R}^2$**. Par ailleurs** $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < 2$**. Ainsi** $\mathcal{B}_1$ **est constituée soit d'aucun élément, soit d'un élément.**

- **Si** $\mathcal{B}_1$ **est constituée d'aucun élément cela donne :** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ **car** $AX = \alpha X$ **pour les deux éléments de** $\mathcal{B}_2$**.**
- **Si** $\mathcal{B}_1$ **est constituée d'un élément cela donne :** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ **car** $AX = \alpha X$ **pour l'élément de** $\mathcal{B}_2$ **et** $AX = 0_{\mathbb{R}^2}$ **pour l'élément de** $\mathcal{B}_1$**.**

Nous constatons qu'à chaque fois la matrice obtenue est diagonale.

12. **On suppose** $\beta \neq 0$**.**

(a) **Par calcul** $\alpha^2 - 4\beta = (a-c)^2 + 4b^2$**. Ainsi** $\alpha^2 - 4\beta^2 \geq 0$**.**

Une somme de carrés est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc : $\alpha^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow a = c$ **et** $b = 0$**. Ceci donne alors** $A = \alpha a I_2$ **qui est une matrice diagonale, ce qui répond à la problématique.**

(b) **Par calcul matriciel** $B^2 = \dfrac{4A^2 - 4\alpha A + \alpha^2 I_2}{\alpha^2 - 4\beta^2}$**. Or** $4A^2 - 4\alpha A = -4\beta I_2$ **donc :**

$\boxed{B^2 = \dfrac{(\alpha^2-4\beta)I_2}{\alpha^2 - 4\beta I_2} = I_2.}$ **On en déduit** $g \circ g = id$ **et** g **étant linéaire nous en déduisons que** **<u>g est une symétrie</u>.**

(c) **Ses élements caractéristiques sont donc** $\mathrm{Ker}(g - id)$ **et** $\mathrm{Ker}(g + id)$**. Ces derniers étant supplémentaires par propriété on en déduit une base** $\mathcal{B}'$ **pour laquelle :** $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},}$ **avec** $\varepsilon_1 \in \{-1;\ 1\}$, $\varepsilon_2 \in \{-1;\ 1\}$**, puisque** $g(e_1) = e_1$ **si** $e_1 \in \mathrm{Ker}(g - id)$ **et** $g(e_2) = -e_2$ **si** $e_2 \in \mathrm{Ker}(g + id)$**.**

On constate bien que cette matrice est diagonale.

(d) **Puisque** $f = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}g + \frac{\alpha}{2}id$ **on en déduit :** $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(g) + \frac{\alpha}{2}I_2 =$ $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}+\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}+\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}}$ **qui est bien diagonale.**

13. $\sin(\theta)T_1(\cos(\theta)) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$**.**

Par délinéarisation de $\sin(3\theta)$ **on obtient :** $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3(1-\sin^2(\theta))\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$**. Or :** $\sin(\theta)T_2(\cos(\theta)) = 4\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin(\theta) = 4\sin(\theta)(1-\sin^2(\theta)) - \sin(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$**. Nous avons donc bien :** $\boxed{\sin(\theta)T_2(\cos(\theta)) = \sin(3\theta).}$

14. $\sin(4\theta) = \sin(2\times 2\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 4\sin(\theta)\cos(\theta)(2\cos^2(\theta)-1) = \sin(\theta)T_3(\cos(\theta))$ **avec** $\boxed{T_3 = 4X(2X^2-1) = 8X^3 - 4X.}$

On calcule $\varphi(T_3) + 15T_3 = (1-X^2)48X - 3X(24X^2-4) + 120X^3 - 60X = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ **ce qui prouve que** $\boxed{T_3 \in \mathrm{Ker}(\varphi + 15id).}$

15. **Le calcul de dérivée donne :** $\boxed{f'(t) =} - 3t\sqrt{1-t^2}P'(t) + (1-t^2)^{3/2}P''(t) = \boxed{\sqrt{1-t^2}\varphi(P).}$

16. **La question précédente nous permet de constater que :** $(\varphi(P)|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)Q(t)\,dt$**. Par intégration par parties :**
$\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)Q(t)\,dt = [f(t)Q(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)Q'(t)\,dt$**. Comme** $f(1) = f(-1) = 0$ **on en déduit :**
$\displaystyle\int_{-1}^{1} f'(t)Q(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} f(t)Q'(t)\,dt = -{}_{-1}^{1}(1-t^2)^{3/2}P'(t)Q'(t)\,dt$**. Au final nous en déduisons :**

$$\boxed{(\varphi(P)|Q) = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{3/2}P'(t)Q'(t)\,dt.}$$

Par ailleurs, partant de $(P, \varphi(Q))$ **et en procédant à la même intégration par parties, mais avec** $f(t) = (1-t^2)^{3/2}Q'(t)$**, nous en déduisons également :**

$$\boxed{(P|\varphi(Q)) = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{3/2}P'(t)Q'(t)\,dt,}$$

ce qui prouve au final que : $\boxed{(\varphi(P)|Q) = (P|\varphi(Q)).}$

17. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ **et** $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ **d'où** $\boxed{\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)).}$

Nous avons $(T_n|T_m) = \displaystyle\int_{-1}^{1} T_m(t)T_n(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$**. Posons alors :** $t = \cos(\theta)$**. La fonction :** $\theta \mapsto \cos(\theta)$ **est bien de classe** C^1 **et la fontion à l'intérieure de l'intégrale est bien continue donc le changement de variable est licite. Nous avons de plus** $t = -1$ **pour** $\theta = \pi$ **et** $t = 1$ **pour** $\theta = 0$ **et** $dt = -\sin(\theta)\,d\theta$**. Par conséquent :**

$(T_n|T_m) = -\int_{\pi}^{0} T_m(\cos(\theta))T_n(\cos(\theta))\sqrt{1-\cos^2(\theta)}\sin(\theta)\,d\theta$.

Or $\forall\theta \in [0,\ \pi],\ \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = |\sin(\theta)| = \sin(\theta)$ **car** $\sin$ **est positive sur** $[0,\ \pi]$**. On en déduit :**
$(T_n|T_m) = \int_{0}^{pi} (\sin(\theta)T_m(\cos(\theta)))(\sin(\theta)T_n(\cos(\theta)))\,d\theta$.

Par ailleurs, par défintion des polynômes T_n **et** T_m **cela donne :**
$(T_n|T_m) = \int_{0}^{pi} \sin((m+1)\theta)\sin((n+1)\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_{0}^{p} i\cos((m+n+2)\theta) + \frac{1}{2}\int_{0}^{p} i\cos((m-n)\theta)\,d\theta$.

On constate que : $\int_{0}^{p} i\cos((m+n+2)\theta) = \left[\frac{1}{m+n+2}\sin((m+n+2)\theta)\right]_{0}^{p} i = 0$ **car** $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(k\pi) = 0$**. Nous avons donc :**

$(T_n|T_m) = \frac{1}{2}\int_{0}^{p} i\cos((m-n)\theta)\,d\theta$.

On distingue alors deux cas :

- $m \neq n$**. Alors :** $m-n \neq 0$ **donc :** $\int_{0}^{p} i\cos((m-n)\theta) = \left[\frac{1}{m-n}\sin((m-n))\right]_{0}^{\pi} = 0$ **pour les mêmes raisons que précédemment.**
- $m = n$**. Alors :** $\cos((m-n)\theta) = 1$ **donc :** $\frac{1}{2}\int_{0}^{p} i\cos((m-n)\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{p} i1\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Au final :

$$\boxed{(T_n|T_m) = 0 \textbf{ si } m \neq n \quad (T_n|T_n) = \frac{\pi}{2}.}$$

⋆ ⋆ ⋆
FIN
⋆ ⋆ ⋆