

Variables aléatoires sur un univers fini

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10 euros, si elle est jaune, il perd 5 euros, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 euros sinon il perd 4 euros.

- (Q 1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
- (Q 2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement). Etablir la loi de probabilité de la variable X et calculer $\mathbb{E}(X)$.
- (Q 3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice 2 : [corrigé] Une puce se déplace sur l'axe des abscisses en partant de l'origine. A chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec la probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. Soit Y_n le nombre de sauts vers la droite effectués après n secondes et X_n la position de la puce après n secondes.

- (Q 1) Exprimer la loi de Y_n .
- (Q 2) Donner une relation entre X_n et Y_n . En déduire la loi de X_n et son espérance.
- (Q 3) Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ?

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, discrètes, indépendantes, de même loi définie par : $P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = P(Y = 2) = \frac{1}{4}$. Soient $U = X + Y$ et $V = |X - Y|$.

- (Q 1) trouver la loi de U .
- (Q 2) Trouver la loi de V .
- (Q 3) Trouver la loi du couple (U, V) .
- (Q 4) U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 : Une matrice aléatoire. On considère $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ où (X, Y, Z, T) sont des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et indépendantes. Donner alors la loi de la variable aléatoire $\det(A)$.

Exercice 5 : [corrigé] **Calculs de probabilité d'évènements donnés à partir de variables aléatoires.**

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

- (Q 1) Déterminer $P(X = Y)$.
- (Q 2) Déterminer $P(X \geq Y)$.
- (Q 3) Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 6 : [corrigé] Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n , avec $n \geq 2$. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne. On note X et Y les variables aléatoires égales aux numéros respectifs du premier et du deuxième jeton.

(Q 1) Déterminer la loi conjointe du couple $(X; Y)$.

(Q 2) En utilisant un système complet d'évènements, en déduire les lois de X et de Y . Donner leurs espérances et leurs variances.

(Q 3) Calculer $E(XY)$.

(Q 4) En déduire $V(X + Y)$.

Exercice 7 : [corrigé] On jette n dés de couleurs différentes ($n \geq 1$), et on note X et Y les variables aléatoires égales aux nombres de 1 et de 6 obtenus.

(Q 1) Déterminer les lois suivies par X et Y , leurs espérances et leurs variances.

(Q 2) Donner la loi conjointe du couple $(X; Y)$.

X et Y sont-elles indépendantes ?

(Q 3) Quelle est la loi suivie par $Z = n - X - Y$?

(Q 4) Montrer que :

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)\right).$$

(Q 5) En déduire la valeur de $E(XY)$.

Exercice 8 : [corrigé] Soit X une variable aléatoire d'image $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k) \quad \text{« formule de sommation des queues »}$$

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 9 : Soit X une variable aléatoire discrète ne pouvant prendre que les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminez la loi de X sachant que : $\mathbb{P}(X < 5) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X > 5) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 4)$.

Exercice 10 : On lance un dé et on note X le numéro obtenu. Déterminer les lois de $Y = (X - 3)^2$ et $Z = \frac{1}{X}$.

Exercice 11 : Le jeu américain « Chuck a luck » est le suivant : on mise 1\$ sur un nombre de 1 à 6 puis on lance simultanément trois dés.

- Si le nombre sur lequel on a misé sort trois fois, on récupère la mise ainsi que 10\$.
- Si le nombre sort deux fois, on récupère la mise ainsi que 2\$.
- Si le nombre sort une fois, on récupère la mise ainsi que 1\$.
- Sinon on perd sa mise.

Quel gain peut-on espérer lors d'une partie ?

Exercice 12 : On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on tire dans une urne.

Dans cette question, on fait un tirage avec remise. On note X le rang auquel on obtient pour la première fois une boule déjà obtenue précédemment.

(Q 1) Montrer que $\mathbb{P}(X > i | X > i - 1) = \frac{n-(i-1)}{n}$.

(Q 2) Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(X > i | X > i - 1)$.

(Q 3) En déduire que $\mathbb{P}(X > k) = \frac{n^k}{n^k}$.

(Q 4) Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$.

(Q 5) En déduire la loi de X .

Exercice 13 : [corrigé] 40% des individus d'une population possède un caractère génétique C . On teste un échantillon de 300 personnes prises dans cette population. On note X le nombre de personnes possédant le caractère génétique C et $F = \frac{X}{300}$ leur fréquence.

(Q 1) Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et F .

(Q 2) À l'aide de Bienaymé-Tchebychev, proposer une estimation de $\mathbb{P}(|F - 0,4| \geq 0,1)$.

(Q 3) Peut-on dire avec 90% de certitude que la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon sera comprise entre 30% et 50% ?

Exercice 14 : [corrigé] On a n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

(Q 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) .

(Q 2) Déterminer la loi de Y et son espérance.

(Q 3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(Q 4) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 15 : [corrigé] On suppose que le nombre de colis fragiles expédiés chaque jour par une entreprise suit une loi uniforme $\mathcal{U}(4)$. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. La probabilité qu'un colis soit détérioré est de $\frac{1}{2}$. On s'intéresse aux colis expédiés un jour donné : on note N le nombre de colis expédiés, X celui des colis détériorés et Y le nombre de colis arrivés en bon état.

1. Calculer $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$ pour les différentes valeurs possibles de n et k .
2. Donner la loi de (X, N) et celle de X .
3. Déterminer $E(Y)$.

Exercice 16 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs $\{-1, 1\}$ avec probabilité $1/2$ et $Z = XY$. Montrer que X , Y et Z sont 2 à 2 indépendantes mais pas indépendantes.

Exercice 17 : [corrigé] On lance n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$; puis on la relance autant de fois que l'on a obtenu de pile. Soit X le nombre de pile obtenu au cours de la première série de lancers. Soit Y le nombre de pile obtenu au cours de la deuxième série de lancers.

(Q 1) Déterminer la loi de X .

(Q 2) Calculer $\mathbb{P}(Y = j | X = i)$ où i et j sont des entiers positifs inférieurs ou égaux à n avec $i \geq j$.

(Q 3) En déduire que : $\mathbb{P}(Y = j) = p^{2j}(1-p)^{n-j} \sum_{i=j}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} p^{i-j}$, (on utilisera la relation $\binom{i}{j} \binom{n}{i} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}$).

(Q 4) En déduire que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, (on utilisera la relation $\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k = (1+p)^{n-j}$).

(Q 5) Calculer $E(X + Y)$.

Exercice 18 : [corrigé] Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega)} x^k P(X = k).$$

1. Que valent $G_X(1)$ et $G'_X(1)$?
2. Simplifier G_X si X suit une loi $\mathcal{B}(n; p)$ et vérifier les résultats de la question précédente.
3. Exprimer $V(X)$ en fonction de G_X et de ses dérivées.
4. Démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $G_X = G_Y$ alors elles suivent la même loi.
5. Démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exercice 19 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. On effectue N lancers d'un dé équilibré. Soit n est le nombre de six obtenus. On lance n fois une pièce dont la probabilité d'apparition de pile est égale à $p \in [0; 1]$. On pourra noter $q = 1 - p$. On définit trois variables aléatoires X , Y , Z par : Z est le nombre de six obtenus aux lancers du dé, X est le nombre de piles obtenus aux lancers de la pièce, et Y est le nombre de faces obtenus aux lancers de la pièce.

(Q 1) Quelle est la loi de Z ?

(Q 2) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de X sachant $Z = n$.

(Q 3) En déduire la loi conjointe du couple $(X; Z)$.

(Q 4) Calculer la loi de X . Démontrer que c'est une loi usuelle et en donner les paramètres. Quelle est la loi de Y ?

(Q 5) Calculer les variances de X , Y et Z , et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

Indications

Correction de l'exercice 2 :

1. Une expérience consiste à effectuer un saut à droite, la probabilité de ce succès étant égale à p . On répète n fois cette expérience dans des conditions d'indépendances. Y_n compte le nombre de succès. Ainsi, Y_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .
2. $X_n = 1 \times Y_n + (-1) \times (n - Y_n) = 2Y_n - n$. Ainsi, X_n prend pour valeurs $\{2k - n/k \in \{0; \dots; n\}\}$. De plus, $\mathbb{P}(X_n = 2k - n) = \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Son espérance est donc égale à $\mathbb{E}(2Y_n - n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = 2np - n$ par linéarité.
3. X_n est centrée par définition si et seulement si $\mathbb{E}(X_n) = 0 \Leftrightarrow p = 1/2$.

Correction de l'exercice 5 : (Q 1) Déterminer $P(X = Y)$.
On sait que $(X = Y) = \cup_{k=1}^n (X = Y = k) = \cup_{k=1}^n (X = k) \cap (Y = k)$. Ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P((X = k) \cap (Y = k))$$

Par indépendances,

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

(Q 2) Déterminer $P(X \geq Y)$. On peut procéder ainsi

$$(X \geq Y) = \cup_{k=1}^n (X \geq k) \cap (Y = k)$$

Ces événements sont deux à deux incompatibles. Donc

$$P(X \geq Y) = \sum_{k=1}^n P((X \geq k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)P(Y = k)$$

par indépendances. Puis, $P(X \geq k) = \sum_{i=k}^n P(X = i) = (n - k + 1) \times \frac{1}{n}$ puisque $(X \geq k) = \cup_{i=k}^n (X = i)$ et que ces événements sont deux à deux incompatibles. Finalement,

$$P(X \geq Y) = \sum_{k=1}^n \frac{n - k + 1}{n} = \frac{1}{n} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{n}$$

(Q 3) Déterminer la loi de $X + Y$. L'ensemble des valeurs prises par $X + Y$ est $\{2; \dots; 2n\}$. Par exemple, $P(X + Y = 2) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{n^2}$, ou encore $P(X + Y = 3) = P(((X = 1) \cap (Y = 2)) \cup ((X = 2) \cap (Y = 1))) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 2)) + \mathbb{P}((X = 2) \cap (Y = 1))$

$1) \cap (Y = 1))$ puisque ce sont des événements incompatibles. Ainsi,

$$P(X + Y = 3) = \frac{2}{n^2}.$$

Plus généralement, soit $k \in \{2; \dots; 2n\}$. On utilise comme d'habitude le système complet d'événements $((X = k')_{k' \in \{1; \dots; n\}})$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$P(X + Y = k) = \sum_{k'=1}^n P((X = k') \cap (X + Y = k)) = \sum_{k'=1}^n P((X = k') \cap (Y = k - k'))$$

par indépendances. On doit donc remplacer $\mathbb{P}(Y = k - k')$. Ce dernier est égal à $1/n$ lorsque $1 \leq k - k' \leq n$ et est nul sinon. Ainsi, $k' \leq k - 1$ et $k' \geq k - n$.

► SI $k - n \leq 0 \Leftrightarrow k \leq n$ alors $k - n \leq 0 < 1 \leq k'$. De plus, k' doit être inférieur à $k - 1 \geq 1$. Ainsi, la somme devient :

$$P(X + Y = k) = \sum_{k'=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$$

► SI $k - n > 0 \Leftrightarrow k \geq n + 1$ alors k' doit être supérieur à $k - n$ et inférieur à $k - 1$ mais à n aussi, donc à n . Ainsi, la somme devient :

$$P(X + Y = k) = \sum_{k'=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n - [k - n] + 1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}$$

Finalement, la loi de $X + Y$ est :

$$\forall k \in \{2; \dots; 2n\}, P(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$$

On peut vérifier en calculant la somme des probabilités des événements élémentaires.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n} P(X + Y = k) &= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \left(2n^2 - \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Un tirage est une 2 liste d'éléments distincts de $\{1; \dots; n\}$. Donc l'univers des possibles est l'ensemble des 2 listes d'éléments distincts. Il en existe donc $n(n-1)$. Tous ces tirages sont équiprobables. On utilise donc la probabilité uniforme. Soit alors $k, k' \in \{1; \dots; n\}, k \neq k'$. Alors

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k')) = \frac{\text{Card}(\{(k, k')\})}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

(Q 2) On sait que $((X = 1), \dots, (X = n))$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k'=1}^n \mathbb{P}((X = k') \cap (Y = k)) = \sum_{k'=1, k' \neq k}^n \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

Ainsi, Y suit une loi uniforme de paramètre n . Par propriété, son espérance est égale à $\frac{n+1}{2}$ et sa variance $\frac{n^2-1}{12}$. Il en est de même de X avec comme système complet d'événements $((Y=1), \dots, (Y=n))$.

(Q 3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1, k' \neq k}^{k'=n} (kk' \mathbb{P}((X=k) \cap (Y=k'))) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1, k' \neq k}^{k'=n} \left(kk' \frac{1}{n(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1, k' \neq k}^{k'=n} (kk') \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{k'=1}^{k'=n} kk' \right) - k \times k \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\sum_{k=1}^n k \right) \left(\sum_{k'=1}^n k' \right) - \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\frac{n(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right)\end{aligned}$$

(Q 4) Utilisons la définition.

$$\begin{aligned}V(X+Y) &= \mathbb{E}(((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y)))^2) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) + \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\end{aligned}$$

et on remplace par les données obtenues précédemment.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) Une expérience consiste à lancer un dé et le succès consiste à obtenir le chiffre 1 (resp. le chiffre 6). La probabilité de ce succès étant égale à $1/6$ (dans les deux cas). On répète n fois cette expérience dans des conditions d'indépendances. X (resp. Y) compte le nombre de succès. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/6)$, ainsi que la variable aléatoire Y .

(Q 2) Le couple $(X; Y)$ prend ses valeurs dans $\{(k, k') \in \{0; \dots; n\}^2, k + k' \leq n\}$. L'univers des possibles est l'ensemble des n listes de $\{1; \dots; 6\}$. Son cardinal est 6^n . Tous les tirages sont équiprobables et on utilise comme la probabilité uniforme. Soit (k, k') deux entiers de l'ensemble précédent. On cherche donc à dénombrer les tirages avec k chiffres 1, k' chiffre 6. Pour placer les 1, on a $\binom{n}{k}$ possibilités, puis les 6, $\binom{n-k}{k'}$. Enfin, il y a $4^{n-k-k'}$ choix pour les autres cases de la n liste. Ainsi,

$$\mathbb{P}((X=k) \cap (Y=k')) = \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{k'} 4^{n-k-k'}}{6^n}.$$

Par exemple, $\mathbb{P}((X=n) \cap (Y=n)) = 0 \neq \mathbb{P}((X=n) \times \mathbb{P}((Y=n)))$. Les variables ne sont donc pas indépendantes.

(Q 3) La variable aléatoire Z compte le nombre de tirages sans chiffre 1 et chiffre 6, donc que des chiffres 2, 3, 4, 5. Par conséquent, Z suit une loi binomiale de paramètres $(n, 4/6)$.

(Q 4)

$$\begin{aligned}V(Z) &= \mathbb{E}(((n - X - Y) - (\mathbb{E}(n - X - Y)))^2) \\ &= \mathbb{E}(((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y)))^2)\end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance. Poursuivons :

$$V(Z) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) + \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Puis,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y))) &= \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - Y\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

par linéarité encore une fois. Ainsi,

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$$

(Q 5) Finalement,

$$V(Z) = \frac{n^5}{36} + \frac{n^5}{36} + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \frac{n}{6} \frac{n}{6}\right)$$

et d'autre part $V(Z) = \frac{n \times 4 \times 2}{6 \times 6}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \frac{n(n-1)}{36}}$$

Correction de l'exercice 8 : On sait que $(X \geq k) = \bigcup_{i=k}^n (X = i)$. De plus, ces événements sont incompatibles deux à deux. Ainsi,

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^n P(X = i)$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n P(X = i)$$

On reconnaît une somme triangulaire. On les permute :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i P(X = i)$$

On calcule la somme : $\sum_{k=1}^i P(X = i) = i \times P(X = i)$ puisque les termes ne dépendent pas de k . Finalement,

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{i=1}^n iP(X = i) = E(X).$$

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et F . X suit une loi binomiale de paramètres $(300, 0.4)$. Par propriété, $\mathbb{E}(X) = 0.4 \times 300 = 120$ et sa variance : $V(X) = 0.4 \times 0.6 \times 300 = 72$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(F) = \frac{\mathbb{E}(X)}{300} = 0.4$ et par propriété, $V(F) = \frac{V(X)}{300^2} = 8 \times 10^{-4}$.

(Q 2) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est, pour $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq a) \leq \frac{V(Y)}{a^2}$$

Or

$$\mathbb{P}(|F - 0.4| \geq 0.1) = \mathbb{P}(|F - \mathbb{E}(F)| \geq 0.1) \leq \frac{V(F)}{0.1^2} \leq 0.08$$

(Q 3) On veut

$$\mathbb{P}(0.3 < F < 0.5) = \mathbb{P}(-0.1 < F - 0.4 < 0.1) = \mathbb{P}(|F - 0.4| < 0.1)$$

en utilisant les propriétés de la valeur absolue. Ainsi,

$$\mathbb{P}(0.3 < F < 0.5) \geq 1 - 0.08 \Leftrightarrow \mathbb{P}(0.3 < F < 0.5) \geq 0.92$$

Ainsi, la probabilité que la fréquence du caractère C dans l'échantillon sera comprise entre 30% et 50% est supérieure ou égale à 92%. Avec 90% de certitude que la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon sera comprise entre 30% et 50%?

Correction de l'exercice 14 :

(Q 1) Les valeurs prises par (X, Y) sont (k, k') avec $1 \leq k' \leq k \leq n$.

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k')) = \mathbb{P}((Y = k') | (X = k)) \mathbb{P}(X = k)$$

(Q 2) On sait que $((X = 1), \dots, (X = n))$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k') &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Y = k') \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Y = k') | (X = k)) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=k'}^n \frac{1}{kn} \end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k'=1}^n k' \mathbb{P}(Y = k') \\ &= \sum_{k'=1}^n k' \left(\sum_{k=k'}^n \frac{1}{kn} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{k'=1}^n \left(\sum_{k=k'}^n \frac{k'}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^k \left(\frac{k'}{k} \right) \end{aligned}$$

par propriété des sommes triangulaires. Pourquoi permuter ? On était bloqué au niveau du calcul.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{n} \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \times \frac{(2+(n+1))(n)}{2} \\ &= \frac{(3+n)}{4} \end{aligned}$$

(Q 3) Par exemple ; $\mathbb{P}((Y = n-1) \cap (X = n)) = \frac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(Y = n-1) \mathbb{P}(X = n) = \left[\frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n^2} \right] \times \frac{1}{n}$. Par définition, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

(Q 4) On sait que $((X = 1), \dots, (X = n))$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((X = Y) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Y = k) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 :

1. Calculer $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$ pour les différentes valeurs possibles de n et k . Pour commencer, n peut être égale à 1, 2, 3 ou 4. L'expérience consiste à recevoir un colis, avec comme succès "il est détérioré", et la probabilité de ce dernier est 1/2. On la répète n fois ici dans des conditions d'indépendances. X

compte le nombre de succès obtenus. Ainsi,

$$\forall k \in \{0; \dots; n\}, \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) = \binom{n}{k} (1/2)^k \times (1-1/2)^{n-k} =$$

2. Soit donc $n \in \{1; \dots; 4\}$, $k \in \{0; \dots; n\}$. Par définition

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (N = n)) = \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{4} \times \binom{n}{k} (1/2)^n$$

Soit $k \in \{0; \dots; 4\}$. La famille $((N = 1), \dots, (N = 4))$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^4 \mathbb{P}((X = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=k}^4 \frac{1}{4} \times \binom{n}{k} (1/2)^n$$

3. Il est immédiat que $Y = N - X$. Par linéarité,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(X).$$

Donc $\mathbb{E}(N) = 5/2$ et par définition

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^4 k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^4 \left(k \times \sum_{n=k}^4 \frac{1}{4} \times \binom{n}{k} (1/2)^n \right) = \sum_{n=1}^4 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \frac{1}{4} (1/2)^n$$

Or

$$\left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \right) = n \times 1 = n.$$

En effet, on sait que si $A \sim B(n, 1)$, alors $\mathbb{E}(A) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 1^k (1-1)^{n-k} = n \times 1$.

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^4 \left(\frac{n}{4 \times 2^n} \right) = \boxed{13/32}.$$

Correction de l'exercice 17 :

(Q 1) Une expérience consiste à lancer une pièce de monnaies, avec p pour probabilité de succès. On la répète n fois dans des conditions d'indépendance. Par propriété, $X \sim B(n, p)$.

(Q 2) De même, on répète i fois le lancer de la pièce dans des conditions d'indépendance. La probabilité d'un succès est p et Y compte le nombre de succès. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = j | X = i) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}$$

(Q 3) On utilise encore une fois $((X = 0), \dots, (X = n))$ comme système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y = j | X = i) \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=j}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} p^{j+i} (1-p)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p)^{n-j} \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} p^{i-j} (1-p)^{n-i} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p)^{n-j} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p)^{n-j} (1+p)^{n-j} \\ &= \binom{n}{j} p^{2j} (1-p^2)^{n-j} \end{aligned}$$

(Q 4) On sait que Y prend ses valeurs dans $\{0; \dots; n\}$ et que

$$\forall j \in \{0; \dots; n\}, \mathbb{P}(Y = j) = \binom{n}{j} p^{2j} (1-p^2)^{n-j}$$

Par définition, Y suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

(Q 5) Par linéarité, $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = np + np^2$.

Correction de l'exercice 18 :

1. $G_X(1) = \mathbb{E}(1^X) = \mathbb{E}(1) = 1$ puisque l'espérance d'une constante est égale à cette constante. En dérivant cette somme finie de fonctions dérivables, on obtient :

$$G'_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega)} k x^{k-1} P(X = k) \Rightarrow G'_X(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k.$$

par propriété de l'espérance.

2. Une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n; p)$ prend ses valeurs dans $\{0; \dots; n\}$.

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

en notant $q = 1 - p$. Ainsi, en appliquant le binôme de Newton, on a :

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xp)^k q^{n-k} = (xp + q)^n$$

Donc, $G_X(1) = (p+q)^n = 1$ puis $G'_X(x) = np(xp+q)^{n-1}$, soit $G'_X(1) = np$. On reconnaît ici l'espérance d'une loi binomiale de paramètres (n, p) .

3. On continue de dériver G_X .

$$G''_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) x^{k-2} P(X = k) \Rightarrow G''_X(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) P(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

par le théorème de transfert. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2 - X) = G''_X(1) \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X) + G''_X(1) = G'_X(1) + G''_X(1)$$

Par propriété, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ Ainsi

$$V(X) = G'_X(1) + G''_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

4. On a

$$\sum_{k \in X(\Omega)} x^k P(X = k) = \sum_{k \in Y(\Omega)} x^k P(Y = k)$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont aussi. Ainsi, $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$. Les variables aléatoires ont donc la même loi.

- 5.

$$G_X(x)G_Y(x) = \left(\sum_{k \in X(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X = k) \right) \left(\sum_{k' \in Y(\Omega)} x^{k'} \mathbb{P}(Y = k') \right)$$

$$= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{k' \in Y(\Omega)} x^{k'} \mathbb{P}(Y = k') x^k \mathbb{P}(X = k)$$

par propriété des sommes rectangulaires. Ainsi, puisque les variables sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} & G_X(x)G_Y(x) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{k' \in Y(\Omega)} x^{k'+k} \mathbb{P}(Y = k') \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{k' \in Y(\Omega)} x^{k'+k} \mathbb{P}((Y = k') \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{k' + k \in (X+Y)(\Omega)} x^{k'+k} \mathbb{P}((Y = k') \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k'' \in (X+Y)(\Omega)} \sum_{k \in X(\Omega)} x^{k''} \mathbb{P}((Y = k'' - k) \cap (X = k)) \\ &= \sum_{k'' \in (X+Y)(\Omega)} x^{k''} \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}((Y + X = k'') \cap (X = k)) \end{aligned}$$

Or $((X = k)_{k \in X(\Omega)})$ est un système complet d'événements. Par la formule de probabilités totales, on a

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}((Y + X = k'') \cap (X = k)) = \mathbb{P}(X + Y = k'')$$

Ainsi,

$$G_X(x)G_Y(x) = \sum_{k'' \in (X+Y)(\Omega)} x^{k''} \mathbb{P}(X+Y = k'') = G_{X+Y}(x)$$

On a donc montré que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

