TD 12

Suites de nombres

LES INCONTOURNABLES

Expressions explicites

Exercice 1 : [corrigé] On considère la suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 3}$.

(Q 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, U_n est défini et $U_n < 2$.

(Q 2) On pose : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$. Montrer que (V_n) est arithmétique et préciser sa raison.

(Q 3) Donner une expression simple de V_n en fonction de n. En déduire une expression simple de U_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 : On considère la suite vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}; u_0 = 1$$

(Q 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

(Q 2) On pose alors $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite de terme général $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique et donner son expression explicite.

(Q 3) En déduire celle du terme général u_n puis son comportement asymptotique.

Exercice 3 : [corrigé] On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) telles que : $u_0 = 1;\ u_1 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3^n$.

(Q 1) Vérifier que la suite de terme général 3^n satisfait cette relation.

(Q 2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3^n$. Trouver une relation satisfaite par (v_n) et en déduire l'expression explicite de (v_n).

(Q 3) En déduire celle de (u_n).

Manipulation de la définition de la limite

Exercice 4 : En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1;$ (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 0;$ (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0;$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + 3n + 1} = +\infty$.

Exercice 5 : [corrigé] (*) **(Théorème de Césaro)** Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1}$. On note ε un nombre réel strictement positif.

(Q 1) Justifier l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et d'un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

(Q 2) En déduire qu'à partir d'un certain rang à préciser, $|v_n| \leq \dfrac{M(N_1+1)}{n+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(Q 3) En déduire que (v_n) converge vers 0.

Suites à valeurs complexes

Exercice 6 : [corrigé] Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles vérifiant :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\Big(u_n - v_n\Big) + 2 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}\Big(u_n + v_n\Big) - 1 \end{cases} \quad \text{et } u_0 = -4;\ v_0 = -2.$$

(Q 1) Montrer que la suite complexe de terme général : $z_n = u_n + iv_n$ converge vers un complexe que l'on déterminera.

(Q 2) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un réel que l'on déterminera.

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 7 : [indications] En utilisant le théorème d'encadrement, montrer que les suites de termes généraux suivants convergent vers un réel que l'on précisera :

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}\,; \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\,;$$

Exercice 8 : [corrigé] **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*; x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Q}$ et que (x_n) converge vers x.

Exercice 9 : [corrigé] On définit deux suites u et v par : $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$.

(Q 1) Montrer que la suite définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique dont on précisera la raison et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

(Q 2) Montrer que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, puis que les deux suites convergent vers une même limite ℓ.

(Q 3) On considère la suite définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est constante. En déduire ℓ.

Exercice 10 : [corrigé] On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \geq 1, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Suites récurrentes - introduction

Exercice 11 : [corrigé] On considère (u_n) telle que : $u_0 \in [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

(Q 1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;\ 1]$.

(Q 2) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 12 : [corrigé] Soit la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

(Q 1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$ et que (u_n) est bien définie.

(Q 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ (on pourra faire apparaitre une quantité conjuguée).

(Q 3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(Q 4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

POUR S'ENTRAÎNER

Expressions explicites

Exercice 13 : [corrigé] Déterminer le terme général de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{4}{u_{n+1}} - \frac{8}{u_n}$.

Manipulations de la définition de la limite

Exercice 14 : [corrigé] En utilisant la définition de la limite, montrer que toute suite d'entiers naturels qui converge vers 0 est une suite stationnaire.

Suites à valeurs complexes.

Exercice 15 : Soit la suite (z_n) définie par $z_0 = \frac{2i}{5}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$.

(Q 1) En utilisant la technique sur les suites arithmético-géométriques, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; z_n = \ell + \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{-4}{5}$ où ℓ est un nombre complexe que l'on déterminera.

(Q 2) En déduire une majoration de $|z_n - \ell|$ puis que (z_n) converge vers ce nombre réel ℓ.

Exercice 16 : [corrigé] Étudier la convergence des suites suivantes d'expressions suivantes :

(a) $u_n = \frac{i^n}{n^2}$; (b) $v_n = \frac{n}{1+in}$; (c) $w_n = e^{\frac{3n+i}{n}}$.

Exercice 17 : [corrigé] On considère la suite complexe de terme général u_n définie par

$$u_0 \in \mathbb{C}; \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3}\Big(2u_n - \overline{u_n}\Big)$$

Étudier le comportement asymptotique de la suite $\Big(u_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 18 : [corrigé] Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants, et donner leur limite éventuelle :

(a) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; (b) $u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$; (c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; (e) $u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha} (\alpha > 0)$; (f) $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$;
(g) $u_n = n^2 + \sin(n)$; (h) $u_n = (-1)^n + n$; (i) $u_n = \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$; (j) $u_n = n^{-\ln n}$.

Exercice 19 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ converge vers un réel à préciser.

Exercice 20 : [corrigé] Étudier si les suites d'expressions suivantes convergent :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$; (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*; v_n = \frac{1}{n} + \cos(\frac{n\pi}{8})$.

Exercice 21 : [corrigé] Soit (x_n) une suite telle que ses suites extraites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que (x_n) converge.

Exercice 22 : [corrigé] On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. On note $I = [1; 2]$.

(Q 1) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et est incluse dans l'intervalle I.

(Q 2) Pour tout $x \in I$, on pose : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g = f \circ f$. Justifier que f est strictement décroissante sur I et que g est strictement croissante sur I.

(Q 3) Vérifier que $u_{n+2} = g(u_n)$ et en déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. Préciser leurs limites.

(Q 4) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 23 : [corrigé] Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2 \in \mathbb{R}, v_0 = 1 \in \mathbb{R}$. Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$. Montrer que ces suites sont adjacentes.

Suites récurrentes - introduction

Exercice 24 : [corrigé] Soit $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(Q 1) Montrer que (u_n) est décroissante.

(Q 2) En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ que l'on précisera.

(Q 3) On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 e^{-S_n}$. En déduire que (S_n) admet une limite que l'on précisera.

Exercice 25 : [corrigé] On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n^3 - 1)$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}(x^3 - 1)$.

(Q 1) Montrer que : $\forall x \in [-1;\ 1]$, $f(x) \in [-1;\ 1]$. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1;\ 1]$.

(Q 2) Vérifier que f est croissante sur $[-1;\ 1]$. En déduire par récurrence que (u_n) est décroissante.

(Q 3) Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ et vérifier que $f(\ell) = \ell$.

(Q 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{3}{5}|u_n - \ell|$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

(Q 5) Déterminer un entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de ℓ à la précision 10^{-2}. En déduire une valeur approchée de ℓ à la précision 10^{-2}.

Une suite implicite

Exercice 26 : [corrigé] Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$.

(Q 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [0; 1[\ /\ f(x_n) = \frac{1}{n}$.

(Q 2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 1.

(Q 3) En déduire que cette suite converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

(Q 4) Que représente ce nombre ℓ pour la fonction f ?

Divers

Exercice 27 : [corrigé] Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs :

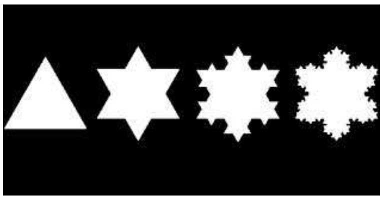
(Q 1) La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

(Q 2) La suite (u_n) n'est pas croissante.

(Q 3) La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Modélisation

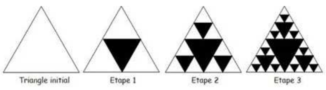
Exercice 28 : Le flocon de VON KOCH s'obtient en partant d'un triangle équilatéral de côté 1, le premier polygone $\mathcal{P}_0$. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales. On construit sur le segment du milieu de chacun de ces côtés un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur du grand triangle. On obtient un nouveau polygone $\mathcal{P}_1$. On réitère cette procédure autant de fois que l'on souhaite. A l'étape n on a obtenu un polygone $\mathcal{P}_n$ qui ressemble de plus en plus à un flocon de neige.



Quelle est la longueur de cette ligne polygonale $\mathcal{P}_n$? Quelle est son comportement asymptotique ? Qu'en est-il de l'aire de ce polygone ?

Exercice 29 : On considère un triangle équilatéral de côté 1. À chaque étape, on construit dans chaque triangle équilatéral non coloré, le triangle équilatéral coloré (en noir) ayant pour sommets les milieux des côtés. Les schémas suivants montrent les étapes 1 à 3. On note p_n et a_n le périmètre et l'aire de la surface colorée à l'étape n.

Étudier les limites éventuelles des deux suites (p_n) et (a_n).



Indications

Exercice 7 :

(a) Utiliser l'encadrement : $\forall k \in [\![1;\ n]\!],\ \dfrac{k}{n^2+n} \leq \dfrac{k}{n^2+k} \leq \dfrac{k}{n^2+1}$, puis sommer.

(b) Utiliser l'encadrement : $\forall k \in [\![1;\ n]\!],\ \dfrac{k}{\sqrt{n^4+n}} \leq \dfrac{k}{\sqrt{n^4+k}} \leq \dfrac{k}{\sqrt{n^4+1}}$, puis sommer.

Correction de l'exercice 1 :

(Q 1) On note P_n la propriété « U_n est défini et $U_n < 2$ » avec $n \in \mathbb{N}$.

- la propriété est vraie au rang 0 puisque U_0 existe et a pour valeur $U_0 = 1 < 2$.
- Supposons que P_n est vraie au rang n. Alors, puisque $U_n < 2$, nous sommes sûrs que $U_n - 3 \neq 0$. Il est donc posible de calculer $\dfrac{U_n - 4}{U_n - 2}$, ce qui justifie l'existence de U_{n+1}. Par ailleurs :
$$\frac{U_n - 4}{U_n - 3} < 2 \Leftrightarrow U_n - 4 > 2(U_n - 3) \Leftrightarrow 2 > U_n$$
car $U_n - 3 < 0$. Ainsi $U_{n+1} < 2$ et P_{n+1} est vraie.
- On a montré que P_0 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Par le théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

(Q 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}-2} - \frac{1}{U_n-2} = \dfrac{1}{\dfrac{U_n-4}{U_n-3} - 2} - \frac{1}{U_n-2} = \frac{U_n-3}{2-U_n} - \frac{1}{U_n-2} = \frac{U_n-3+1}{2-U_n} = -1$. Par définition, la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est donc arithmétique de raison -1 et de premier terme $V_0 = -1$.

(Q 3) Par propriété, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = -1 - n$. Ainsi, pour tout entier n, on a :
$$U_n - 2 = \frac{1}{V_n} = \frac{-1}{n+1} \Leftrightarrow U_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$
Par opération usuelle sur les limites, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2.$$

Correction de l'exercice 3 :

(Q 1) Nous avons : $3^{n+2} - 4.3^{n+1} + 4.3^n = 3^n(9 - 12 + 4) = 3^n$.

(Q 2) $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$. Il s'agit donc d'une suite récurrente double dont la racine double du discriminant est 2. On en déduit : $v_n = (an+b)2^n$. Or $v_0 = 0$ et $v_1 = -\frac{11}{4}$. Ainsi : $b = 0$ et $a = -\frac{11}{8}$, d'où $\boxed{v_n = -11.2^{n-3}}$.

(Q 3) $u_n = v_n + 3^n = \boxed{-11.2^{n-3} + 3^n}$

Correction de l'exercice 5 :

1. La première inégalité est l'écriture de la définition de la convergence d'une suite vers 0, mais avec $\frac{\varepsilon}{2}$. La deuxième inégalité vient du fait que toute suite convergente est bornée.
2. D'après l'inégalité triangulaire, $v_n \leq \dfrac{\sum_{k=0}^{n} |u_k|}{n+1}$. En utilisant Chasles et d'après 1, pour $n \geq N_1 + 1$, $\sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{N_1} |u_k| + \sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k| \leq (N_1+1)M + (n - N_1)\frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit : $|v_n| \leq \dfrac{M(N_1+1)}{n+1} + \dfrac{\varepsilon(n-N_1)}{2(n+1)}$. Puisque $n - N_1 \leq n \leq n+1$, on en déduit $\dfrac{\varepsilon(n-N_1)}{2(n+1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\forall n \geq N_1 + 1,\ |v_n| \leq \dfrac{M(N_1+1)}{n+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M(N_1+1)}{n+1} = 0$, il existe, par définition de la limite, un rang N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $\dfrac{M(N_1+1)}{n+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geq \max(N_1+1, N_2)$, $|v_n| \leq \varepsilon$. On en déduit que (v_n) converge vers 0 toujours par définition de la limite.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) Nous avons : $z_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + 2 + \frac{i}{2}u_n + \frac{i}{2}v_n - i = \frac{1}{2}z_n + \frac{i}{2}(u_n + \frac{i}{2}v_n) = \dfrac{1+i}{2}z_n + 2 - i$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de point fixe $\ell = \dfrac{2(2-i)}{1+i} = (2-i)(1-i) = 1 - 3i$ donc : $z_n = a\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n + 1 - 3i$. Or $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc est de module strictement inférieur à 1. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} a\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = 0$, donc que $\boxed{(z_n) \text{ converge vers } 1-3i.}$

(Q 2) Par définition de la limite d'une suite complexe, la partie réelle de z_n et la partie imaginaire convergent respectivement vers 1 et -3, c'est à dire :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1 \text{ et } (v_n) \text{ converge vers } -3.}$$

Correction de l'exercice 8 :

La partie entière d'un nombre est un nombre entier relatif. Par définition de $\mathbb{Q}$, on en déduit que x_n est un rationnel pour tout entier n. De plus,
$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx \Rightarrow x - \frac{1}{n} < x_n \leq x$$

Par le théorème de l'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n =$ *x. Cela démontre que tout nombre réel est la limite d'une suite rationnelle.*

Correction de l'exercice 9 :

1. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \dfrac{1}{12}w_n$. On en déduit que (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{12}$. De plus $|q| < 1$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.}$
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}w_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \times 11$ car $w_0 = 11$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$
   $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{4}w_n = -\frac{1}{4}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \times 11$ ce qui prouve que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$
   Puisque : $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$ et en reprenant les résultats précédents, nous avons deux suites dont l'une est $\boxed{\text{croissante}}$, l'autre est $\boxed{\text{décroissante}}$ et dont la $\boxed{\text{différence tend vers 0}}$. Ce sont donc des $\boxed{\text{suites adjacentes}}$ par définition et donc deux suites qui $\boxed{\text{convergent vers une même limite}}$ ℓ par propriété.
3. $t_{n+1} = t_n$ et ce pour tout entier naturel n, ce qui prouve que (t_n) est constante. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 = 99$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_n + 8v_n = 99$. En passant cette égalité à la limite (ce que l'on peut faire puisque (u_n) et (v_n) convergent), on en déduit la relation : $11 \times \ell = 99 \Leftrightarrow \boxed{\ell = 9.}$

Correction de l'exercice 10 :

Posons $v_n = S_{2n}$. Alors : $v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}$, ce qui est négatif puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2n+2} < \dfrac{1}{2n+1}$. Par conséquent, (v_n) est décroissante.

Posons $w_n = S_{2n+1}$. Alors : $w_{n+1} - w_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+2}$, ce qui est positif puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+2}$. Par conséquent, (w_n) est croissante. Enfin, $w_n - v_n = -\dfrac{1}{2n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = 0$.

Les points précédents assurent que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes et donc par le théorème sur les suites adjacentes convergentes vers une même limite commune ℓ. Les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergeant toutes deux vers une même limite ℓ, on en conclut que $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } \ell.}$

Correction de l'exercice 11 :

1. On pose $\mathcal{P}(n)$ " $0 \leq u_n \leq 1$" et on procède par récurrence pour démontrer le résultat :
   - $0 \leq u_0 \leq 1$ par hypothèse, d'où l'initialisation.
   - Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé $0 \leq u_n \leq 1$, alors : $0 \leq u_n^2 \leq 1$ et donc $0 \leq u_n + u_n^2 \leq 2$, ce qui entraîne $0 \leq \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \leq 1$, et donc que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. D'où l'hérédité.
   - Par le théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n - 1)}{2}$. Or $u_n \geq 0$ et $u_n - 1 \leq 0$ car $u_n \leq 1$ donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ceci étant vrai pour tout entier naturel n, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc par le théorème sur les suites monotones, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$. En utilisant les opérations élémentaires et le fait que (u_{n+1}) converge vers l en tant que suite extraite de (u_n), on obtient par passage à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ que $l = \frac{1}{2}(l + l^2) \Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1$. 0 et 1 appartiennent tous deux à l'intervalle $[0;\ 1]$. Pour finir, il nous reste à nous rappeler que (u_n) est décroissante, ce qui nous permet d' aboutir aux deux situations suivantes :
   - $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ donc la suite (u_n) est constante et converge vers 1.
   - $0 \leq u_0 < 1$. Alors : pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_0$, donc par passage à la limite, $\ell \leq u_0 < 1$. Nécessairement la suite $\boxed{(u_n) \text{ converge vers 0.}}$

Correction de l'exercice 12 :

(Q 1) On pose : $\mathcal{P}(n)$: « u_n est définie et $u_n > 0$ »et on procède par récurrence.
- $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2}$ donc u_1 existe et $u_1 > 0$ ce qui prouve l'initialisation.
- Si pour un certain n fixé, u_n existe et $u_n > 0$, alors $2 + u_n > 0$ donc on peut considérer la racine de cette expression, ce qui prouve que u_{n+1} existe. De plus, $2 + u_n > 0 \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} > \sqrt{0}$ par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$. Ceci prouve donc que $u_{n+1} > 0$ ce qui finit de prouver l'hérédité.

(Q 2) En utilisant l'expression conjuguée, nous obtenons $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2 - u_n}{\sqrt{2 + u_n} + 2}$, donc :
$|u_{n+1} - 2| = \dfrac{|u_n - 2|}{\sqrt{2 + u_n} + 2}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2 + u_n} + 2$ donc par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{\sqrt{2 + u_n} + 2} \leq \dfrac{1}{2}$, puis par multiplication par $|u_n - 2| \geq 0$, nous en déduisons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|.}$$

(Q 3) On pose : $\mathcal{P}(n)$ « $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ »et on procède par récurrence.

- $|u_0 - 2| = 2 = \frac{1}{2}^{-1}$ ce qui prouve l'initialisation.
- Si $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour un certain n fixé, alors : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ en utilisant successivement la question 2 et l'hypothèse de récurrence. Puisque : $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, nous en déduisons : $|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ce qui prouve l'hérédité.

(Q 4) Puisque : $0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ 0, par théorème d'encadrement, la suite de terme général $|u_n - 2|$ converge vers 0. Or :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ converge vers } 2.}$$

Correction de l'exercice 13 :

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, nous pouvons poser : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Alors : $v_{n+2} - 4v_{n+1} + 8v_n = 0$. Il s'agit donc d'une suite récurrente double de discriminant -16 et de racines complexes conjuguées : $2 \pm 2i = 2\sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$. On en déduit qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^{3n/2}\left(a\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + b\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{3n/2}\left(a\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + b\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}.}$$

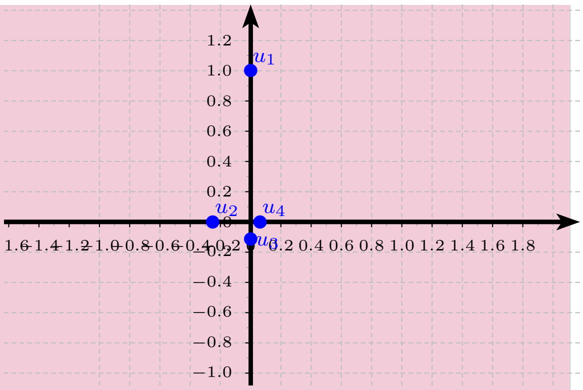
Correction de l'exercice 14 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels qui converge vers 0. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, 0 \leq u$$

Prenons $\varepsilon = 1/2$ par exemple. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. Or 0 est le seul entier de l'intervalle $[0; 1/2]$. Ainsi, à partir du rang n_0, on a montré que les termes de la suite sont nuls. Cette suite est donc stationnaire.

Correction de l'exercice 16 : 1. On sait que la suite de terme général i^n n'admet pas de limite. On peut représenter quelques points d'affixe les premiers termes de la suite de terme général u_n pour observer si elle a une limite.



Il semblerait qu'elle converge vers 0. On calcule donc le module :

$$|u_n| = \frac{|i^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \to_{n\to+\infty} 0$$

Ainsi, par propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $v_n = \frac{n}{1+in}$. On a une forme indéterminée. On factorise :

$$v_n = \frac{n}{n(1/n + i)} = \frac{1}{1/n + i} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{i} = -i$$

par opération usuelle.

3. $w_n = e^{\frac{3n+i}{n}} = e^{3+i/n} = e^3 \times e^{i/n}$. Or $e^{i/n} = \cos(1/n) + i\sin(1/n)$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i/n} = 1$. Donc par opération usuelle, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^3$.

Correction de l'exercice 17 :

Posons $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n \in \mathbb{R}$ et $y_n \in \mathbb{R}$. Alors : $x_{n+1} + iy_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2x_n + 2iy_n - x_n + iy_n)$ ce qui donne en identifiant les parties réelles et imaginaires : $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n$ et $y_{n+1} = y_n$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = y_0$ et $x_n = \dfrac{x_0}{3^n}$. Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$, ce qui prouve que (z_n) converge vers $\mathrm{Im}(z_0)$.

Correction de l'exercice 18 : (a) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; On a une FI. On factorise :

$$u_n = \frac{n(1 + (-1)^n/n)}{n(1 - (-1)^n/n)} = \frac{1 + (-1)^n/n}{1 - (-1)^n/n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n/n = 0$ par le théorème de l'encadrement. Donc par opérations usuelles,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

(b) $u_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$; On a une FI, on factorise :

$$u_n = \frac{3^n\left((2/3)^n + 1\right)}{3^n\left((2/3)^n - 1\right)} = \frac{(2/3)^n + 1}{(2/3)^n - 1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n = 0$ puisque $((2/3)^n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2/3. Par opérations usuelles,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}.$$

(c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
On a une FI, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Ainsi, par opérations usuelles;

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

(d) $u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}(\alpha > 0)$;
On sait que $(\sin(n))_{n\geq 0}$ n'a pas de limite. On souhaite donc se débarrasser de cette quantité. On utilise que :

$$|\sin(n)| \leq 1 \Rightarrow |\frac{\sin(n)}{n^\alpha}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Or par limite usuelle, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n^\alpha = 0$. Par le théorème de l'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

(e) $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$;
On n'a pas d'opération usuelle valable sur les suites du type $(u_n)^{v_n}$. On revient donc à la définition de ce nombre :

$$u_n = \exp\Big(\frac{\ln(1/n)}{\ln(n)}\Big) = \exp\Big(-1\Big)$$

C'est donc une suite constante et elle converge donc vers e^{-1}.

(f) $u_n = n^2 + \sin(n)$;
On sait que $(\sin(n))_{n\geq 0}$ n'a pas de limite. On souhaite donc se débarrasser de cette quantité. On utilise que :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow n^2-1 \leq u_n \leq n^2+1 \Rightarrow n^2-1 \leq u_n$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$. Par le théorème de divergence par minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

(g) $u_n = (-1)^n + n$;
On sait que $((-1)^n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite. On souhaite donc se débarrasser de cette quantité. On utilise que :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow n-1 \leq u_n \leq n+1 \Rightarrow n-1 \leq u_n$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$. Par le théorème de divergence par minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

(h) $u_n = \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$;
On sait que $(\sin(n))_{n\geq 0}$ n'a pas de limite. On souhaite donc se débarrasser de cette quantité. On utilise que :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

(i) $u_n = n^{-\ln n}$.
On n'a pas d'opération usuelle valable sur les suites du type $(u_n)^{v_n}$. On revient donc à la définition de ce nombre :

$$u_n = \exp(-\ln(n) \times \ln(n))$$

Par opérations usuelles, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

Correction de l'exercice 20 :

(a) La suite de terme général $(-1)^n$ pose problème. On prend $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to_{n\to+\infty} 1$ et $u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to_{n\to+\infty} -1$. Les deux suites extraites convergent vers deux nombres différents. Par la propriété des suites extraites, on en déduit que la suite de terme général u_n ne converge pas.

(b) De même, le cosinus pose problème. On prend par exemple, $v_{16n} = \frac{1}{16n} + \cos(\frac{16n\pi}{8}) = \frac{1}{16n} + 1 \to_{n\to+\infty} 1$. Puis, $v_{16n+1} = \frac{1}{16n+1} + \cos(2n\pi + \frac{\pi}{8}) \to_{n\to+\infty} \cos(\pi/8) \neq 1$. Par la propriété des suites extraites, on en déduit que la suite de terme général v_n ne converge pas.

Correction de l'exercice 21 :

Si on arrive à montrer que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) convergent vers le même nombre alors, par théorème, la suite de terme général x_n converge.

On note a la limite de (x_{2n}), b la limite de (x_{2n+1}) et enfin c la limite de (x_{3n}).
On sait que (x_{3n}) converge vers un réel c. Donc, la suite extraite $(x_{3\times(2n)})$ converge vers c. Or la suite $(x_{2\times 3n})$ est une suite extraite de (x_{2n}) et elle converge donc vers a. Par unicité de la limite, on a donc montré que $a = c$.

On sait que (x_{3n}) converge vers un réel c. Donc, la suite extraite $(x_{3(2n+1)})$ converge vers c. Or la suite $(x_{6n+3} = x_{2\times(3n+1)+1})$ est une suite extraite de (x_{2n+1}) et elle converge donc vers b. Par unicité de la limite, on a donc montré que $b = c$.

Finalement, $a = b$ et par théorème, la suite de terme général x_n converge.

Correction de l'exercice 22 :

(Q 1) On note $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$ »et on procède par récurrence.

- L'initialisation est vérifiée car u_0 existe (égal à 1) et $1 \leq u_0 \leq 2$.
- Pour la phase d'hérédité, si l'on suppose que u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$ pour un certain n fixé, alors $\frac{1}{u_n}$ a un sens puisque $u_n \neq 0$ et $1 \leq u_n \leq 2$ et donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$. Par conséquent, u_{n+1} existe et $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$. Puisque $\frac{3}{2} \geq 1$, nous prouvons l'hérédité.

  SINON ON APPLIQUE LA FONCTION f A CETTE INÉGALITÉ en déterminant ses variations sur le segment $[1; 2]$.
- Finalement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n a un sens et $1 \leq u_n \leq 2$.

(Q 2) f est dérivable sur $I = [1;\ 2]$ par opérations usuelles et pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On en déduit que pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, donc que f est strictement décroissante. Alors

$$1 \leq x < y \leq 2 \Rightarrow 2 \geq f(x) > f(y) \geq 3/2$$

par stricte décroissance et donc, puisque f est décroissante sur $[1, 2]$,

$$f(f(x)) < f(f(y))$$

. Par conséquent, $g = f \circ f$ est une fonction strictement croissante.

(Q 3) Pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = g(u_n)$. Si l'on pose : $v_n = u_{2n}$, alors $v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n)$. De même avec $w_n = u_{2n+1}$.
Nous avons : $v_0 = 1$, $w_0 = 2$, $v_1 = \frac{3}{2}$, $w_1 = \frac{5}{3}$. Nous avons donc $v_0 \leq v_1$. En appliquant g à cette inégalité on aura alors, par croissance de g : $g(v_0) \leq g(v_1) \Leftrightarrow v_1 \leq v_2$ etc.. On montre alors par récurrence que (v_n) est croissante. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété : $\mathcal{P}(n)$ « $v_n \leq v_{n+1}$ ».

- $v_0 \leq v_1$, d'où l'initialisation.
- Si $v_n \leq v_{n+1}$ pour un certain n fixé, alors par stricte croissance de g, $g(v_n) \leq g(v_{n+1})$ c'est à dire $v_{n+1} \leq v_{n+2}$, d'où l'hérédité.

Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n.
On montre de la même façon que (w_n) est strictement décroissante ($w_1 < w_0$). Au final, on sait que

$$\left| \begin{array}{l} (v_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est majorée par } 2. \end{array} \right. .$$

Donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \in [1;\ 2]$. De même (w_n) est décroissante et minorée par 1 donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell' \in [1;\ 2]$.

Calculons ces limites. On sait que

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{v_n}},\quad w_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{w_n}}$$

Par opérations élémentaires, on sait que $\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_n}}\right)$ converge vers $1+\frac{1}{1+\frac{1}{l}}$ et également que $\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{w_n}}\right)$ converge vers $1+\frac{1}{1+\frac{1}{l'}}$. En tant que suites extraites, les suites (v_{n+1}) et (w_{n+1}) convergent vers l et l' respectivement. Finalement, par passage à la limite dans les égalités,

$$l = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l}}, l' = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l'}}$$

Or $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$et $x \in [1; 2] \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\ell = \ell' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

(Q 4) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers le même réel, et par le théorème des suites extraites, on en déduit que :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers cette limite commune qui est } 0.}$$

Correction de l'exercice 23 :

- Bien évidemment, par récurrence élémentaire, nous avons $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
- (a) Initialisation. $v_0 \leq u_0$
  (b) Hérédité. Supposons que $v_n \leq u_n$ à un rang n. Alors on sait que $\forall (a;\ b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2\right)$. Donc, $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}^2 + \sqrt{v_n}^2\right) \Leftrightarrow v_{n+1} \leq u_{n+1}$.
  (c) Par le théorème de récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$.
- De cette inégalité, on en déduit : $\frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n$ ce qui prouve que $u_{n+1} \leq u_n$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc décroissante.
- Nous en déduisons également que : $\sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} \geq v_n$ ce qui prouve que $v_{n+1} \geq v_n$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est donc croissante.
- Ainsi, $v_n \leq u_n \leq u_0$ donc (v_n) est croissante et majorée donc converge vers ℓ_1. De même $u_n \geq v_n \geq v_0$ donc (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers ℓ_2.
- Enfin, en passant $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ à la limite, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell_2$ (en tant que suite extraite de (u_n)), nous en déduisons : $\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2$.
- Le point précédent assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ par opérations usuelles. D'autre part, (u_n) est croissante et

(v_n) est décroissante donc ces deux suites sont adjacentes.

Correction de l'exercice 24 :

(Q 1) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. En effet : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ ce qui prouve l'initialisation. D'autre part, si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$ ce qui prouve l'hérédité. D'où le résultat par récurrence.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$ et $e^{-u_n} \leq 1$ puisque $u_n > 0$. Ainsi, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leq u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

(Q 2) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, cette suite (u_n) converge vers un réel $l \geq 0$. Donc la suite (u_{n+1}) converge également vers l car c'est une suite extraite de (u_n). Donc en passant l'égalité : $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ à la limite, on en déduit que $\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$. **On a montré que** (u_n) **converge vers** 0**.**

(Q 3) Nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$ donc en faisant le produit de ces expressions, nous avons : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{-\sum_{k=0}^{n} u_k}$. Or par télescopage, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$, d'où le résultat.

Finalement : $S_n = -\ln\left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)$ et donc par opérations usuelles $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 25 :

(Q 1)
- f est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-1;\ 1]$. De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3x^2}{5}$. D'où le tableau de variations de f :

x	-1		1
f	$-2/5$	$\nearrow$	0

  Ainsi, $f([-1;1]) = [-0,4;0] \subset [-1;1]$.
- Notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [-1;\ 1]$ »et procédons par récurrence pour montrer que ceci est vrai tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_0 = 0$, nous avons bien $u_0 \in [-1;\ 1]$ ce qui prouve l'initialisation. D'autre part, si l'on suppose que $u_n \in [-1;\ 1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors : $f(u_n) \in [-1;\ 1]$ d'après le point ci-dessus. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ donc : $u_{n+1} \in [-1;\ 1]$ ce qui prouve l'hérédité, et donc le résultat par récurrence.

(Q 2)
- Précédemment, nous avons montré que la fonction était croissante. De plus, $u_0 = 0; u_1 = -1/5$. Ainsi, $u_1 \leq u_0$, donc en appliquant f croissante, il vient : $f(u_1) \leq f(u_0) \Leftrightarrow u_2 \leq u_1$ etc.. Elle semble donc décroissante, mais pour le montrer, rien ne vaut une récurrence !
- Notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \leq u_n$ »et procédons par récurrence pour montrer que ceci est vrai tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $u_1 = -\dfrac{1}{5}$ donc $u_1 \leq u_0$, ce qui prouve l'initialisation. D'autre part, si $u_{n+1} \leq u_n$ et puisque $u_n \in [-1;\ 1]$, $u_{n+1} \in [-1;\ 1]$, nous avons : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ en vertu de la croissance de f sur $[-1;\ 1]$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ce qui prouve l'hérédité, et donc le résultat par récurrence.

(Q 3) (u_n) est décroissante et minorée par -1 donc par le théorème sur les suites monotones, elle converge vers un réel $\ell \in [-1;\ 0]$ (puisque $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq u_0$). D'autre part, en passant l'égalité : $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^3 - 1)$ à la limite ((u_{n+1}) converge vers l en tant que suite extraite, et par opérations élémentaires, $\left(\frac{1}{5}(u_n^3 - 1)\right)$ converge vers $\frac{1}{5}(l^3 - 1)$), on en déduit que $f(\ell) = \ell$.

(Q 4)
- On estime : $|f(u_n) - f(\ell)| = \dfrac{1}{5}|u_n^3 - \ell^3| = \dfrac{1}{5}|u_n - \ell||u_n^2 + \ell u_n + \ell^2|$ (identité remarquable). Or, d'après l'inégalité triangulaire et puisque $|\ell u_n| \leq 1$, $|\ell^2| \leq 1$, $|u_n^2| \leq 1$, nous avons : $|u_n^2 + \ell u_n + \ell^2| \leq |u_n^2| + |\ell u_n| + |\ell^2| \leq 3$. Nous en déduisons donc que : $|f(u_n) - f(\ell) \leq \dfrac{3}{5}|u_n - \ell| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{3}{5}|u_n - \ell|$ car $f(\ell) = \ell$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.
- Notons $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ »et procédons par récurrence pour montrer que ceci est vrai tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $|u_0 - \ell| = |\ell| \leq 1$ car $u_0 = 0$ et $\ell \in [-1;\ 0]$. Or $\left(\dfrac{3}{5}\right)^0 = 1$ ce qui prouve l'initialisation. Supposons maintenant : $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, d'après le point précédent, $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{3}{5}|u_n - \ell|$. Or, par hypothèse de récurrence, $|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ donc : $\dfrac{3}{5}|u_n - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}$. Ainsi, $|u_{n+1} - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}$ ce qui prouve l'hérédité et donc le résultat par récurrence.

(Q 5) On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel : $|u_{n_0} - \ell| \leq 10^{-2}$. Or d'après l'inégalité précédente, $|u_{n_0} - \ell| \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n_0}$. Il suffit donc de chercher $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n_0} \leq 10^{-2}$ pour avoir $|u_{n_0} - \ell| \leq 10^{-2}$. Or en passant l'inégalité $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n_0} \leq 10^{-2}$ au logarithme nous avons : $n_0 \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \leq -2\ln(10) \Leftrightarrow n_0 \geq \dfrac{2\ln(10)}{\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}$ car $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) = -\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) < 0$. Une valeur approchée de $\dfrac{2\ln(10)}{\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}$ étant 9.0... on en déduit qu'il suffit de choisir $n_0 \geq$

10 afin d'obtenir u_{n_0} pour approximation de ℓ à 10^{-2} près. Enfin : $u_{10} \approx -0.2$.

Correction de l'exercice 26 :

(Q 1) Par opérations élémentaires, f est dérivable sur $I = [0;\ 1]$ et $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur I donc induit une bijection de I vers $f(I)$. Or, $f(I) = [f(1);\ f(0)]$ car f est continue et décroissante, donc $f(I) = [0;\ 1]$. Il ne nous reste plus qu'à constater que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \in f(I)$, ce qui nous assure, par bijectivité, l'existence et l'unicité d'un antécédent de $1/n$ que l'on note x_n.

x	0		1
f	1	$\searrow$	-2

(Q 2) Puisque $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$, nous avons : $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$ car f est strictement décroissante. Ceci étant vrai pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite (x_n) est croissante.

Puisque $\forall n \in I$ nous savons que (x_n) est majorée par 1.

(Q 3) (x_n) est croissante et majorée donc par le théorème des suites monotones, cette suite converge vers ℓ. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq 1$ donc par passage à la limite dans l'inégalité, $0 \leq \ell \leq 1$.

(Q 4) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$ et par opérations élémentaires que $x_n^3 - 3x_n + 1 \to l^3 - 3l + 1$, en passant à la limite nous obtenons : $\boxed{f(\ell) = 0}$. ℓ est donc un $\boxed{\text{zéro de la fonction } f.}$

Correction de l'exercice 27 :

(Q 1) La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq u_{n+1}$.

(Q 2) La suite (u_n) n'est pas croissante : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.

(Q 3) La suite (u_n) ne converge pas vers 0 : $\exists \varepsilon > 0; \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 0| > \varepsilon$.