TD 8

Sommes et produits de nombres

LES INCONTOURNABLES

Sommes simples

Exercice 1 : [solutions] Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{n+1} 3; \quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n} 2k; \quad \text{(c)} \sum_{k=n+1}^{2n} 2k; \quad \text{(d)} \sum_{k=1}^{n}(2k+e^{-k}); \text{(e)} \sum_{k=0}^{n}(3^{2k+1}+2^{k+2}).$$

Exercice 2 : [solutions] On souhaite calculer $S=\sum_{k=0}^{n} k^2$. On pose $A=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$.

1. En développant $(k+1)^3$, exprimer A à l'aide de $\sum_{k=0}^{n} k^3, \sum_{k=0}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} k$ et d'un nombre.
2. Après un glissement d'indice, compléter $A=\sum_{k=?}^{?} k^3$.
3. Des deux questions précédentes, exprimer S en fonction de n uniquement.

Exercice 3 : [solutions] [corrigé] Donner une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$ en fonction de n puis calculer la limite de cette expression quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : [indications] [corrigé] Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n=\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1. Préciser les valeurs C_n et S_n lorsque x est multiple de 2π.
2. On suppose que x n'est pas multiple de 2π. Calculer $U_n=C_n+iS_n$ et en déduire :
$$C_n=\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad S_n=\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
3. En vous aidant des résultats précédents, calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k)$ puis $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k)$.
4. De même, comment peut-on calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$?

Exercice 5 : [corrigé] Soit x un réel. On note $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Simplifier l'expression de $P_n(x)$ puis montrer que pour $x \neq 1$, $P_n'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.
2. En déduire des expressions simples des sommes $\sum_{k=0}^{n} k2^k$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k}{2^k}$, puis déterminer leurs limites lorsque n vers $+\infty$.

Produits

Exercice 6 : [corrigé] Calculer les produits suivants :

$$\text{(a) } \prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2}\,; \quad \text{(b) } \prod_{k=0}^{n} e^{-k}.$$

Sommes doubles

Exercice 7 : [corrigé] Soit un entier $n \geq 2$. Calculer les sommes :
(a) $S_3 = \displaystyle\sum_{(i;\,j)\in[\![1;\,n]\!]^2} \ln(ij)\,;$ (b) $S_4 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j|.$

Exercice 8 : [corrigé] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. En calculant $I_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} j$ de deux façons différentes, montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Binôme de Newton

Exercice 9 : [solutions] Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a) } \sum_{k=1}^{n} 5^k \binom{n}{k}; \quad \text{(b) } \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k}; \quad \text{(c) } \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^{k+1} \binom{n}{k};$$

Exercice 10 : [solutions]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $A_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1}$. Donner une expression simple de $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n.

Exercice 11 : [corrigé] Soit un entier $n \geq 2$. Calculer les sommes :
(a) $S_5 = \displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i}\,;$ (b) $S_6 = \displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}.$

À quoi correspond S_5 pour le triangle de Pascal ?

POUR S'ENTRAÎNER

Sommes simples

Exercice 12 : [solutions] Calculer les sommes suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{n}(3^{2k+2}+2^{6k+1});\quad \text{(b)} \sum_{k=1}^{n}(3^{3k+3}-26k-27);\quad \text{(c)} \sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(k).$$

Exercice 13 : [solutions] Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{6} a_k;\ S_2=\sum_{k=0}^{n+1} a_k;\ \ S_3=\sum_{k=0}^{2n} a_k;\ S_4=\sum_{k=0}^{n} 2a_k;\ S_5=\sum_{k=0}^{n}(a_k-1);\ S_6=\sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 14 : [corrigé] On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+n+1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ et en déduire une expression simple de u_n en fonction de n.

Exercice 15 : [solutions] Calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right)$.

Exercice 16 : [corrigé] Calculer : $\displaystyle S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Produits

Exercice 17 : Calculer les produits suivants :

$$\text{(a)} \prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k+2};\quad \text{(b)} \prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right);\quad \text{(c)} \prod_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2;\text{\&}\ \text{(d)} \prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)};\quad \text{(e)} \prod_{k=0}^{n} 2^k.$$

Sommes doubles

Exercice 18 : [corrigé] Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{4} i^2 3^j;\quad \text{(b)} \sum_{1\leq i,j\leq n}(3i-2j);\quad \text{(c)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^j.$$

Exercice 19 : [corrigé]

(a) Calculer $\displaystyle A=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=i}^{5} i$ et $\displaystyle B=\sum_{j=0}^{5}\sum_{i=0}^{j} i$. Obtenez-vous les mêmes résultats ?

(b) Plus généralement, calculer $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} i$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

Binôme de Newton

Exercice 20 : On veut calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 21 : [corrigé] Soit un entier $n \geq 2$. Calculer $S = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$.

Exercice 22 :

1. Montrer que : $\forall k \in [\![0;\ n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
2. Calculer : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$ puis $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

DIVERS

Exercice 23 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{4k+4}} + \frac{1}{2^{4k+5}} \right)$.

1. Calculer $\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n$.
2. Écrire une fonction Python, nommée S, d'argument n et qui retourne la valeur de S_n. Que renvoient $S(12)$ et $S(13)$?
3. Préciser les représentations machines de ℓ et de S_{13} avec la norme $IEEE754$ et commenter le résultat ci-dessus.

Indications

Exercice 4 :

1. Si $x = 0\ [2\pi]$, $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$.
2. On calcule $U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique. Alors C_n est la partie réelle de U_n et S_n en est la partie imaginaire.

Solution de l'exercice 1 :

(a) $3\Big(n+1-2+1\Big) = 3n$
(b) $n(n+1)$
(c) $n(3n+1)$
(d) $\frac{n\times[2\times 1+2\times n]}{2} + e^{-1} \times \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$
$= n(n+1) + e^{-1} \times \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$
(e) $\frac{3}{8}9^{n+1} + 4.2^{n+1} - \frac{35}{8}$

Solution de l'exercice 2 :

$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution de l'exercice 3 :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{4}.$$

Solution de l'exercice 9 :

(a) $6^n - 1$, (b) $(-2)^n - (3)$, (c) $-3((-2)^n - (-3)^n)$.

Solution de l'exercice 10 :

$A_n + B_n = 2^n$ et $A_n - B_n = 0$ donc $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

Solution de l'exercice 12 :

(a) $\frac{9}{8}(9^{n+1}-1) + \frac{2}{63}(64^{n+1}-1)$
(b) $\frac{27^2}{26}(27^n - 1) - 13n^2 - 40n$.

Solution de l'exercice 13 :

1. $S_1 = 48$, $S_2 = (n+1)(n+3)$, $S_3 = 4n(n+1)$, $S_4 = 2n(n+2)$, $S_5 = n^2+n-1$, $S_6 = n(3n+2)$.
2. $a_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = 2n+1$.

Solution de l'exercice 15 :

$\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$.

Correction de l'exercice 3 :

En faisant une décomposition en éléments simples (cf. exercice précédent), nous obtenons : $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$, donc : $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$. Or, à l'aide du glissement d'indice : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k}$. Nous sommes donc amenés à calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k}$. On peut alors constater que les termes correspondant aux valeurs de k comprises entre 3 et n se simplifient. Ce qui donne au final : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$. Par opérations usuelles : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Si x est multiple de 2π alors $\cos(kx) = 1$ pour tout k et $C_n = n+1$. De plus, $\sin(kx) = 0$ et $S_n = 0$.
2. $U_n = C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx)$ par linéarité. Puis, $U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ par définition du nombre $e^{i\theta}$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ix} qui est différente de 1 puisque x n'est pas multiple de 2π. Par propriété,

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{ix(n+1)/2}\left(e^{-ix(n+1)/2} - e^{ix(n+1)/2}\right)}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \end{aligned}$$

par factorisation par l'angle moitié. Puis,

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{-2i\sin(x(n+1)/2)}{-2i\sin(x/2)} e^{ixn/2} \\ &= \frac{\sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)} e^{ixn/2} \end{aligned}.$$

Puis, $C_n = Re(U_n) = \cos(nx/2) \times \frac{\sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}$ et $S_n = Im(U_n) = \sin(nx/2) \times \frac{\sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)}$.
3. On sait que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2k)+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(2k) + \sum_{k=0}^{n} 1\right) \end{aligned}$$

par linéarité. Enfin, en prenant $x = 2$ (qui n'est pas un multiple de 2π) nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) = \frac{1}{2}\left(\cos(n) \times \frac{\sin((n+1))}{\sin(1)} + (n+1)\right)$$

puis :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k) &= \sum_{k=0}^{n} (1 - \cos^2(k)) \\ &= (n+1) - \frac{1}{2}\Big(\cos(n) \times \frac{\sin((n+1))}{\sin(1)} \\ &\quad +(n+1)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left((n+1) - \cos(n) \times \frac{\sin((n+1))}{\sin(1)}\right) \end{aligned}.$$

4. Nous allons dans $\mathbb{C}$ et nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) = Im\Big(\sum_{k=0}^{n}e^{ia+ikb}\Big) = Im\Big(e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\Big(e^{ib}\Big)^k\Big)$$

(a) Si b est multiple de 2π alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) = Im\Big(e^{ia}\times(n+1)\Big) = \boxed{(n+1)\sin(a}$$

(b) Sinon, par la propriété des sommes des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) &= Im\Big(e^{ia}\tfrac{1-e^{ib(n+1)}}{1-e^{ib}}\Big)\\ &= Im\Big(e^{ia}e^{inb/2}\tfrac{\sin(b(n+1)/2)}{\sin(b/2)}\Big)\\ &= \boxed{\sin(a+nb/2)\times\frac{\sin(b(n+1)/2)}{\sin(b/2)}}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison x. Si $x=1$ alors $P_n(x)=(n+1)$. Sinon, $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction P_n est dérivable en tant que quotient de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}P_n'(x) &= \frac{\Big(1-x\Big)\times[-(n+1)x^n]-[-1]\times\Big(1-x^{n+1}\Big)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

2. D'autre part, on peut dériver P_n de la manière suivante : $P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}$. Finalement, par linéarité,

$$\sum_{k=0}^{n}k2^k = 2\times P_n'(2) = \frac{1}{2}\times\frac{n2^{n+1}-(n+1)2^n+1}{(1-2)^2}$$

$$= 2\Big(2^n\times(n-1)+1\Big).$$

Par produit de limites usuelles, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k2^k = +\infty$. De même,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(-1)^k}{2^k} &= \tfrac{-1}{2}\times P_n'(-1/2)\\ &= \tfrac{-1}{2}\times\tfrac{n(-1/2)^{n+1}-(n+1)(-1/2)^n+1}{(3/2)^2}\\ &= \tfrac{-1}{2}\tfrac{\Big((-1/2)^n\times(-3n/2-1)+1\Big)}{9/4}.\end{aligned}$$

Cette dernière suite tend vers $-1/2\times 1/(9/4) = -2/9$ par croissances comparées.

Correction de l'exercice 6 :

(a)
$$\begin{aligned}A &= \prod_{k=3}^{n}\frac{k-2}{k+2}\\ &= \frac{\prod_{k=3}^{n}(k-2)}{\prod_{k=3}^{n}(k+2)}\\ &= \frac{\prod_{k'=1}^{n-2}k'}{\prod_{k"=5}^{n+2}k"}\end{aligned}$$

par changement de variables ($k'=k-2$ et $k"=k+2$). Puis, en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned}A &= \frac{\prod_{k=1}^{n-2}k}{\prod_{k=5}^{n+2}k}\\ &= \frac{1\times2\times3\times4}{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{24}{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

(b) $\prod_{k=0}^{n}e^{-k} = e^{-\sum_{k=0}^{n}k} = e^{-n(n+1)/2}$.

Correction de l'exercice 7 :

(a)

$$\begin{aligned}S_4 &= \sum_{1\le i\le j\le n}|i-j| = \sum_{1\le i\le j\le n}(j-i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)\times(n+i)}{2} - \sum_{i=1}^{n}i\times(n-i+1)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\times(\frac{n+i}{2}-i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\times(\frac{n-i}{2})\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\times(\frac{i}{2})\\ &= \frac{1}{2}\times\sum_{i=0}^{n-1}i^2+i\\ &= \frac{1}{2}\times\Big(\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\frac{(n-1)n[2n-1+3]}{6}\\ &= \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

- D'une part : $I_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}j = \sum_{j=1}^{n}j^2 = S_n$.
- D'autre part :
$$\begin{aligned}I_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}j\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(n+i)((n-i)+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}n^2-\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}n+\sum_{i=1}^{n}i\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(n^3-S_n+\frac{n(n+1)}{2}+n^2\Big).\end{aligned}$$

On en déduit : $S_n = \frac{1}{2}\left(n^3 - S_n + \frac{n(n+1)}{2} + n^2\right) \Leftrightarrow 6S_n = 2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$. D'où la valeur de S_n demandée en divisant l'égalité précédente par 6.

Correction de l'exercice 11 :

(a) C'est une somme triangulaire. Par propriété,

$$S_5 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}.$$

On calcule $\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 1^i \times 1^{j-i} = (1+1)^j = 2^j$. Puis, $S_5 = \sum_{j=0}^{n} 2^j$. Par propriété de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$S_5 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

(b) C'est toujours une somme triangulaire :

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j}\binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \times \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \times 2^j \\ &= 3^n \end{aligned}$$

Le nombre S_5 correspond à la somme des coefficients binomiaux des $n+1$ premières lignes du triangle de Pascal.

n \ p	0	1	2	3	4	5	
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	

Le triangle de Pascal

Par exemple, si $n = 2$ alors on obtient $7 = 2^{2+1} - 1$.

Correction de l'exercice 14 :

Par la propriété des sommes télescopiques, $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_{n-1+1} - u_0 = u_n - u_0$. D'autre part, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1} - u_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \frac{n \times \left([n-1+1]+[1]\right.}{2} = \frac{n(n+1)\left.\right)}{2}$ par la propriété des sommes des termes d'une suite arithmétique. Enfin puisque $u_0 = 0$, on obtient $\boxed{u_n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Correction de l'exercice 16 :

L'expression est définie si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$. Nous commençons par travailler dans $\mathbb{C}$:

$$S_n(x) = Re\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\Big)$$

C'est donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{\cos(x)}$. Ce nombre est différent de 1 si et seulement si $\sin(x) \neq 0$ ce qui équivaut à $x \neq 0[\pi]$.

1. Si $x = 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$ et $S_n = n+1$.
2. Sinon,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} &= \frac{1-(e^{ix}/cos(x))^{n+1}}{1-e^{ix}/\cos(x)} \\ &= \frac{\frac{[\cos(x)]^{n+1} - e^{ix(n+1)}}{\cos^{n+1}(x)}}{\frac{\cos(x) - [\cos(x) + i\sin(x)]}{\cos(x)}} \\ &= \frac{\cos(x)}{[\cos(x)]^{n+1}\sin(x)} \times i\Big([\cos(x)]^{n+1} - [\cos(x(n+1)) + i\sin((n+1)x)]\Big) \end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie réelle, nous obtenons :

$$S_n = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)\sin(x)}$$

Correction de l'exercice 17 :

$$\begin{aligned} (a) \quad &= \frac{\prod_{k=1}^{n-2} k}{\prod_{k=5}^{n+2} k} \\ &= \frac{1\times 2\times 3\times 4}{(n-1)(n)(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{24}{(n-1)(n)(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n}(k+2)} \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=4}^{n+2} k} = \frac{6}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

(b) $$\prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{2n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$$

$$=\frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{2n}(k-1)\times\prod_{k=2}^{2n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{2n}k\right)^2}=\left(\frac{\prod_{k=1}^{2n-1}k\times\prod_{k=3}^{2n+1}k}{\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{2n}k\right)^2}\right)$$

par changement de variables. En simplifiant, nous avons :

$$C=\frac{1\times(2n+1)}{2n\times 2}=\frac{2n+1}{4n}$$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(-1)k^2=\prod_{k=1}^{2n}(-1)^k\Big(\prod_{k=1}^{2n}k\Big)^2=(-1)^{n(n+1)/2}\Big((2n)!\Big)$

(d) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}e^{(\sqrt{2}-k)}=e^{\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{2}-k)}=e^{(n+1)\sqrt{2}-n(n+1)/2}$.

(e) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}2^k=2^{\sum_{k=0}^{n}k}=2^{n(n+1)/2}$

Correction de l’exercice 18 :

1. **C’est une somme rectangulaire.**

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{4}i^2 3^j=\Big(\sum_{i=1}^{7}i^2\Big)\times\Big(\sum_{j=1}^{4}3^j\Big)=\frac{7\times 8\times(2\times 7+1)}{6}$$

$$3^1\times\frac{1-3^4}{1-3}=\frac{140\times 380}{2}=16\,800.$$

2. Par linéarité,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}(3i-2j)&=3\sum_{1\le i,j\le n}i-2\sum_{1\le i,j\le n}j\\&=3\Big(\sum_{i=1}^{n}i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}1\Big)-2\Big(\sum_{i=1}^{n}1\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}j\Big)\end{aligned}$$

car ce sont des sommes rectangulaires.
Finalement,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i,j\le n}(3i-2j)&=3\Big(\sum_{i=1}^{n}i\Big)\sum_{j=1}^{n}1-2\Big(\sum_{i=1}^{n}1\Big)\sum_{j=1}^{n}j\\&=3\tfrac{n(n+1)}{2}\times n-2\times n\times\tfrac{n(n+1)}{2}\\&=\tfrac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$

3. C’est une somme triangulaire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}2^j&=\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}-1}{2-1}=2\sum_{i=1}^{n}2^i-\sum_{i=1}^{n}1\\&=2\times\tfrac{2^n-1}{2-1}-n=2^{n+1}-2-n.\end{aligned}$$

Correction de l’exercice 19 :

(a) Ce sont des sommes triangulaires.

$$\begin{aligned}A&=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=i}^{5}i\\&=\sum_{i=0}^{5}[5-i+1]i\\&=\sum_{i=0}^{5}6i-i^2=6\frac{5\times 6}{2}-\frac{56(25+1)}{6}\\&=90-55=35.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\sum_{j=0}^{5}\sum_{i=0}^{j}i\\&=\sum_{j=0}^{5}\frac{j(j+1)}{2}=(1/2)\times\sum_{j=0}^{5}(j^2+j)\\&=(1/2)\times(\tfrac{5\times6\times(5\times2+1)}{6}+\tfrac{5\times6}{2})\\&=(1/2)\times(55+15)=35.\end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat ce qui nous permet d’illustrer la propriété sur les sommes triangulaires.

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{0\le i\le j\le n}i&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}i\\&=\sum_{i=0}^{n}i\sum_{j=i}^{n}1\\&=\sum_{i=0}^{n}i(n-i+1)\\&=(n+1)\sum_{i=0}^{n}i-\sum_{i=0}^{n}i^2\\&=(n+1)\times\tfrac{n(n+1)}{2}-\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \tfrac{n(n+1)}{6}\times(3(n+1)-(2n+1))\\&=\tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

Correction de l’exercice 21 :

C’est encore une somme triangulaire. Par propriété,

$$S=\sum_{0\le i\le j\le n}\binom{j}{i}2^{i+j}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^{i+j}.$$

On calcule $\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^{i+j}=2^j\times\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^i$ par linéarité et étant donné que 2^j ne dépend pas de i. Puis, par le binôme de Newton,

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^{i+j}=2^j\times(1+2)^j=6^j.$$

Enfin, par propriété de la somme des termes d’une suite géométrique, on a :

$$S=\frac{1-6^{n+1}}{1-6}=\frac{6^{n+1}-1}{5}.$$

Par exemple, si $n=2$ alors on obtient $7=2^{2+1}-1$.

[1] Srinivâsa Aiyangâr Râmânujan, (22 décembre 1887 – 26 avril 1920) est un mathématicien indien. Ramanujan est né en Inde, dans une famille de brahmanes pauvre et orthodoxe. Il était un autodidacte et resta toujours très autonome. Il apprit les mathématiques à partir de deux uniques livres qu'il s'était procurés avant ses 15 ans : La Trigonométrie plane de S. Looney, et Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics de S. Carr qui contenait une liste de quelque 6 000 théorèmes sans démonstration. Ces deux ouvrages lui permirent d'établir une grande quantité de résultats sur la théorie des nombres, les fonctions elliptiques, les fractions continues et les séries impropres, tout en créant son propre système de représentation symbolique pour arriver à ces résultats. Jugeant son entourage académique dépassé, il publia plusieurs articles dans les journaux mathématiques indiens et tenta alors d'intéresser les mathématiciens européens à son travail par des lettres qu'il leur envoyait.

Une lettre de 1913 à Godfrey Harold Hardy contenait une longue liste de théorèmes sans démonstration. Hardy considéra tout d'abord cet envoi inhabituel comme une supercherie, puis – interpellé par l'étrangeté de certains théorèmes – en discuta longuement avec John Littlewood pour aboutir à la conviction que son auteur était certainement un « homme de génie »1. Hardy lui répondit et invita Ramanujan à venir en Angleterre ; une collaboration fructueuse, en compagnie de Littlewood, en résulta.

Tourmenté toute sa vie par des problèmes de santé, Ramanujan vit son état empirer en Angleterre ; il retourna en Inde en 1919 et mourut peu de temps après à Kumbakonam (en) (à 260 km de Madras) à l'âge de 32 ans. Il laissa derrière lui des livres entiers de résultats non démontrés (appelés Cahiers de Ramanujan) qui continuent d'être étudiés au début du XXIe siècle.

Ramanujan travailla principalement en théorie analytique des nombres et devint célèbre pour ses formules sommatoires impliquant des constantes telles que π et e, des nombres premiers et la fonction partage d'un entier obtenue avec Godfrey Harold Hardy.

Ramanujan avait un raisonnement très rapide, ce qui faisait dire à certains de ses contemporains qu'il était un mathématicien « naturel », voire un génie.

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆

1. Source Wikipedia