TD 25

Séries numériques

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé] Préciser la nature des séries ci-dessous et calculer leurs sommes en cas de convergence :

(Q 1) $\sum \frac{2^n+1}{3^n}$; (Q 2) $\sum \frac{1}{2^{2n+4}}$; (Q 3) $\sum \frac{na^n}{(n-1)!}$, $a \in \mathbb{R}$; (Q 4) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$;

Exercice 2 : [corrigé] Préciser la nature des séries ci-dessous.

(Q 1) $\sum \dfrac{1}{(2n+1)(n+2)}$; (Q 3) $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{\mathrm{ch}(\frac{1}{n})-1}\right)$; (Q 5) $\sum \frac{n}{3^n}$;

(Q 2) $\sum_{n\geq 1}\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right)$; (Q 4) $\sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$; (Q 6) $\sum \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Exercice 3 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt$ et $b_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

1. Montrer que (a_n) converge vers 0 puis que $na_n = \ln(2) - b_n$.
2. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$?

Exercice 4 : [corrigé] Soit $\alpha > 1$

(Q 1) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$?

(Q 2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrer :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

(Q 3) En déduire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha},$$

puis :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 5 : [D'APRÈS BANQUE PT] On pose : $u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$.

(Q 1) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.

(Q 2) Donner le développement limité à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$.

(Q 3) En déduire un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

(Q 4) La série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est-elle convergente ?

(Q 5) Que peut-on en déduire pour la convergence de (u_n)? On désignera ℓ sa limite.

(Q 6) Donner en fonction de ℓ et de n, un équivalent de $n!$.

(Q 7) On admet (cf. TD intégration - Exercice sur les intégrales de Wallis pour sa justification) :

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{\pi}(*).$$

En déduire la valeur de ℓ puis la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Exercice 6 : [corrigé] **Étude de la série harmonique** On pose $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

(Q 1) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

(Q 2) On pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Expliciter v_n en fonction de n.

(b) Étudier la nature de la série $\sum v_n$.

(c) En déduire que (u_n) est convergente. Sa limite notée γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

Ainsi, on a montré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 7 : On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

(Q 1) Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(Q 2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série convergente.

(Q 3) On pose, pour $n \geq 2$: $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

(a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $v_n = a\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

(b) On pose : $w_n = a\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n\sqrt{n}} - v_n$. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $w_n > 0$.

(c) Montrer que $v_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est divergente.

Exercice 8 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

(Q 1) Montrer que la suite converge et donner sa limite.

(Q 2) Rappeler le théorème sur les séries télescopiques.

(Q 3) Étudier la convergence de la série $\sum u_n^2$.

(Q 4) Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

(Q 5) En déduire la nature de $\sum u_n$.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 9 : Que des comparaisons. Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général u_n :

(Q a) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$;

(Q b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(Q c) $u_n = \sqrt{\dfrac{\mathrm{sh}(\frac{1}{n})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{n})} - 1}$;

(Q d) $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(x)}{n^2+\cos^2(x)}\,dx$;

(Q e) $u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^2(x)}{1+x}\,dx$;

(Q f) $u_n = \dfrac{\sin(\dfrac{1}{n^2(n+1)^2})}{\cos(\dfrac{1}{n(n+1)})[1-\cos(\dfrac{1}{n})]}$;

(Q g) $u_n = \frac{n^n}{e^n}$.

Exercice 10 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de $\sum\limits_{n\geq 1} (\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$ en fonction des réels a et b. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 11 : Soit $u_n = \dfrac{e - (1+1/n)^n}{n^{3/2}+n}$ Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 12 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 \in]0;\pi[$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

(Q 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \pi$ et étudier la nature de $(u_n)_{n\geq 0}$.

(Q 2) Rappeler le théorème sur les séries télescopiques.

(Q 3) En déduire que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

(Q 4) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$.

(Q 5) De ces deux questions, en déduire la nature de $\sum u_n^2$ puis de $\sum u_n$.

Exercice 13 : [corrigé] **(Critère des séries alternées)** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. On considère la série de terme général $(-1)^{k-1}u_k$ et on note sa somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$.

1. En étudiant les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ démontrer que la série de terme général $(-1)^{k-1}u_k$ converge et que sa somme, notée S, vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \qquad (5)$$
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :
$$|S - S_n| \leq u_n \qquad (6)$$
3. On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge vers $\ln(2)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} pour tout $n \geq N_p$.

Exercice 14 :

1. Montrer que ces sommes existent : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}(\frac{2}{n^2})$ et $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}(\frac{1}{2n^2})$.
2. Montrer que $\forall x > 0, \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x-1) = \text{Arctan}(\frac{2}{x^2})$.
3. En déduire S et T.
4. En déduire la valeur de $U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \text{Arctan}(\frac{2}{n^2})$.

Exercice 15 : Vers le critère de Raabe Duhamel. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_1 > 0, \forall n \geq 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n-1}{3n}$.

1. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$. Montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{1/3}}$.
3. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 16 : On fixe $x \in \mathbb{R}_+$ et on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ est une série convergente. On note $S(x)$ sa valeur et S la fonction associée, définie sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $S(0)$?
2. (a) On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Rappeler la formule donnant le produit de deux polynômes et en déduire :
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$
   (b) En déduire que $\forall (x;\ y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $S_n(x)S_n(y) = S_{2n}(x+y)$. Quelle relation en déduit-on pour S ?
3. Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}_+, \left|\frac{S(h)-1}{h} - 1\right| \leq hS(h)$. En déduire S est dérivable en 0 et préciser $S'(0)$.
4. En vous aidant des deux question précédentes, montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que S est solution de l'équation différentielle : $y' - y = 0$.
5. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = \exp(x)$.

Indications

Correction de l'exercice 1 :

(Q 1) On remarque que $\frac{2^n+1}{3^n} = (2/3)^n + (1/3)^n$. Les séries $\sum(2/3)^n$ et $\sum(1/3)^n$ converge en tant que séries géométriques de raison $0 \leq 2/3 < 1, 0 \leq 1/3 < 1$. Par linéarité, la série $\sum(2/3)^n + (1/3)^n$ converge. De plus, sa somme est égale à

$$\frac{1}{1-2/3} + \frac{1}{1-1/3} = 9/2.$$

(Q 2) $\sum \frac{1}{2^{2n+4}}$; On remarque que $\frac{1}{2^{2n+4}}; = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{4^n}$. Or la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $0 \leq 1/4 < 1$. Par linéarité, la série $\sum \frac{1}{2^{2n+4}}$ converge. De plus, la somme est

$$\frac{1}{16} \times \frac{1}{1-1/4} = 1/12.$$

(Q 3) $\sum \frac{na^n}{(n-1)!}$;

(Q 4) On sait que :

- La suite $(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right))$ est positive.
- $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln(1+\frac{2}{n-1}) \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 1$.

Par le théorème de comparaison, la série diverge .
Sinon, on peut utiliser la définition. On s'intéresse aux sommes partielles.

$$\sum_{n=2}^{N} \ln((n+1)/(n-1)) = \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) = \sum_{n=3}^{N+1}$$

par sommes télescopique. Ainsi, $\sum_{n=2}^{N} \ln((n+1)/(n-1)) \to_{N\to+\infty} +\infty$.

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) $\sum \frac{n}{2^n}$; On sait que :

- La suite $(n/2^n)$ est positive.
- De plus, $n/2^n = O(1/n^2)$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème de comparaison, la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge .

(Q 2) $\sum \frac{1}{(2n+1)(n+2)}$; On sait que :

- La suite $(\frac{1}{(2n+1)(n+2)})$ est positive.
- De plus, par croissances comparées (sinon faites un équivalent), $\frac{1}{(2n+1)(n+2)} = O(1/n^2)$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{(2n+1)(n+2)}$ converge .

(Q 3) $\sum \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.
On sait que :

- La suite $(\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right))$ est positive.
- $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln(1+\frac{2}{n^2+3n}) \sim \frac{2}{n^2+3n} \sim \frac{2}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Par le théorème de comparaison, la série $\sum \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$ converge.

Correction de l'exercice 4 :

(Q 1) Par le théorème sur les séries de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(Q 2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[k; k+1]$. En utilisant l'interprétation de l'intégrale en tant que aire, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

(Q 3) On somme entre n et N et on obtient par la relation de Chasles :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \sum_{k=n}^{k=N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Or

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{N+1} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right)$$

et

$$\int_{n-1}^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

(Q 4) On remarque que $\frac{1}{N^{\alpha-1}} \to_{N\to+\infty} = 0$ et $\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \to_{N\to+\infty} = 0$ comme $\alpha > 1$.
Par passage à la limite (avec $N \to +\infty$) dans l'inégalité, on obtient

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

Finalement,

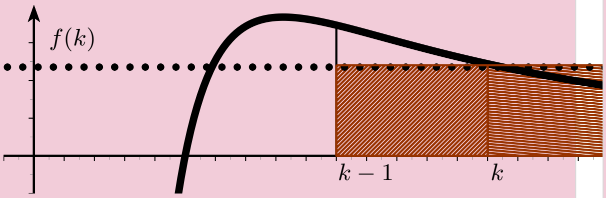
$$\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}} \to_{n\to+\infty} 1$$

par le théorème de l'encadrement. Par définition,

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) On utilise l'interprétation de l'intégrale en terme d'aire.



On a : pour $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$$

On somme et on utilise la relation de Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt$$

On calcule et on rajoute 1 pour obtenir H_n :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n)$$

Finalement,

$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1}$$

On divise par $\ln(n)$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \leq H_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

On a : $1 + \frac{1}{\ln(n)} \to 1$. Puis étudions

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n[1+1/n])}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1+$$

Enfin, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \to 1$. Finalement, par le théorème d'encadrement ; $\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1$. Par définition,

$$\boxed{H_n \sim \ln(n)}$$

(Q 2) (a)

$$v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln(1$$

(b) Cherchons un équivalent de v_n. On aura ainsi le signe et on pourra utiliser le théorème de comparaison. Pour l'équivalent, utilisons les développements limités !

$$\begin{aligned} v_n &= \tfrac{1}{n[\frac{1}{n}+1]} - \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2})\right) \\ &= \tfrac{1}{n} \times \left(1 - \tfrac{1}{n} + o(\tfrac{1}{n})\right) - \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2}\right. \\ &= \tfrac{-1}{2n^2} + o(\tfrac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Donc $v_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On sait que :

- $v_n \sim \frac{-1}{2n^2}$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par le théorème sur les séries de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Par linéarité, $\sum$ converge aussi.
- (v_n) est négative à partir d'un certain rang.

Par le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge.

(c) Remarquons que $v_n = u_{n+1} - u_n$. Cela nous fait penser à un télescopage... Sommons !

$$\sum_{n=1}^{N-1} v_n = u_N - u_1 \Rightarrow u_N = u_1 + \sum_{n=1}^{N-1} v_n$$

Or la série $\sum v_n$ converge. Donc, la suite de terme général u_N converge aussi.

Ainsi, on a montré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) On étudie la monotonie de ces suites puisque l'on sait que la suite (u_n) est décroissante.

(a) $S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+2} + (-1)^{2n} u_{2n+1} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0$ car la suite est décroissante. Donc (S_{2n}) est croissante.

(b) $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} u_k$ $(-1)^{2n+2} u_{2n+3} + (-1)^{2n+1} u_{2n+2} = u_{2n+3} - u_{2n+2} \leq 0$ car la suite est décroissante. Donc (S_{2n+1}) est décroissante.

(c) $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n} u_{2n+1} \to 0$. En effet, $|S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1}$ et par hypothèse la suite (u_n) converge vers 0, donc sa suite extraite également.

Les deux suites sont donc adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers le même nombre que l'on note S. De plus, on sait que : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \qquad (5)$$

(Q 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors si n est paire égale à $2p$, on obtient :

$$S_{2p} \leq S \leq S_{2p-1} \Leftrightarrow 0 \leq S - S_{2p} \leq S_{2p-1} - S_{2p}$$

Or $S_{2p-1} - S_{2p} = -(-1)^{2p-1} u_{2p} = u_{2p}$. On obtient donc $0 \leq S - S_{2p} \leq u_{2p}$. De même, si n est impaire égale à $2p-1$ alors

$$S_{2p} - S_{2p-1} \leq S - S_{2p-1} \leq 0$$

Or $S_{2p} - S_{2p-1} = (-1)^{2p-1} u_{2p} = -u_{2p}$. Ainsi,

$$-u_{2p} \leq S - S_{2p-1} \leq 0 \Rightarrow |S - S_{2p-1}| \leq u_{2p} \leq u_{2p-1}$$

car la suite est décroissante.
On a montré par disjonction des cas que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq u_n}$$

(Q 3) La suite $(1/k)_{k\geq 1}$ est positive et décroissante. Par le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{((1)^{k-1}}{k}$ converge.

(Q 4) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge vers $\ln(2)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un entier naturel N_p tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

est une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-p} pour tout $n \geq N_p$. Par Q3, on en déduit que

$$|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}| \leq \frac{1}{n}$$

On pose alors $N_p = 10^p$. Alors

$$\forall n \geq 10^p, |S - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}| \leq 10^{-p}.$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆