

Espaces probabilisés finis

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : On lance deux fois un dé honnête.

1. Quel est l'univers Ω ?
2. Trouver un libellé pour l'événement

$$A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$$

3. À quelle partie de Ω correspond l'événement B : « la somme des deux numéros obtenus est inférieure ou égale à 4 » ?
4. Calculer la probabilité des événements suivants : $A, B, A \cap B, A \cup B, A - B, B - A$.

Exercice 2 :

On lance n dés avec $n \geq 2$. On choisit de modéliser l'expérience par l'univers $\Omega = \{1; \dots; 6\}^n$ muni de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$. Pour $k \in \{0 \dots; n\}$, on note A_k^n l'événement "la face 6 est obtenue exactement k fois."

(Q 1) Calculer $\mathbb{P}(A_0^n), \mathbb{P}(A_1^n), \mathbb{P}(A_2^n)$.

(Q 2) Écrire les événements suivants à l'aide de A_0^n, A_1^n, A_2^n :

- (a) M_6 : "Obtenir au moins une fois la face 6 en lançant 6 dés;"
- (b) M_{12} : "Obtenir au moins deux fois la face 6 en lançant 12 dés;"
- (c) M_{18} : "Obtenir au moins trois fois la face 6 en lançant 18 dés."

(Q 3) Calculer alors la probabilité des événements précédents.

Exercice 3 : [corrigé] On lance un dé à 6 faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle. Calculer la probabilité d'obtenir :

- (a) chaque face ;
- (b) un nombre pair.

Exercice 4 : [corrigé] Une urne contient 5 boules blanches et 4 rouges. On effectue n tirages ($n \geq 1$) successifs en respectant la règle suivante : *si la boule tirée est rouge alors on la remet dans l'urne, sinon on ne la remet pas.*

On note R_k : l'évènement "on obtient une boule rouge au k ème tirage"; B_k : l'évènement "on obtient une boule blanche au k ème tirage".

On s'intéresse à l'évènement E_k : "on obtient *une seule* boule blanche et c'est au k ème tirage".

(Q 1) CAS $n = 3$.

- (a) Calculer $\mathbb{P}(E_1)$ **en justifiant**.
- (b) Calculer de même $\mathbb{P}(E_2)$ et $\mathbb{P}(E_3)$.
- (c) En déduire la probabilité d'obtenir une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.

(Q 2) CAS $n \geq 1$.

- (a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.
- (b) Calculer la probabilité p_n de l'évènement "obtenir au moins une boule blanche en n tirages." Quelle valeur peut-on prendre pour n afin d'avoir $p_n \geq 0,99$?

Exercice 5 : [corrigé] Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne, jusqu'à ce que l'on tire la boule noire. À chaque tirage, si on obtient une boule blanche alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche de plus.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k l'événement "la boule noire apparaît pour la première fois au tirage k ", et B_k l'événement "les k premières boules tirées sont blanches".

(Q 1) Si au bout de $k - 1$ tirages on n'a obtenu que des boules blanches, combien a-t-on de boules dans l'urne? En déduire $\mathbb{P}(B_k | B_{k-1})$ pour tout entier $k \geq 1$.

(Q 2) Simplifier $B_1 \cap \dots \cap B_k$. En déduire $\mathbb{P}(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(Q 3) Calculer $\mathbb{P}(N_k | B_{k-1})$, puis $\mathbb{P}(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(Q 4) Simplifier la somme $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}$. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_k)$. Calculer et interpréter la limite de S_n .

Exercice 6 : [corrigé] *Transmission d'une information.* Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers des canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs : 0 ou 1 et a la probabilité $p \in [0; 1]$ d'être bruité. Pour $n \in \mathbb{N}$, I_n est l'événement "le message est le même que celui initialement transmis" et p_n sa probabilité.

(Q 1) Si $p = 0$, que vaut p_n ? Dans toute la suite, on suppose que $p > 0$.

(Q 2) En utilisant le système complet d'événements $(I_n, \overline{I_n})$ et la formule des probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

(Q 3) En déduire l'expression de p_n , puis sa limite, si elle existe.

Exercice 7 : [corrigé]  Une puce saute entre un point A et un point B de la façon suivante : si elle est en A alors elle y reste avec la probabilité $1/4$ sinon elle saute en B . Si elle est en B alors elle y reste avec la probabilité $1/4$ sinon elle saute en A .

On note a_n la probabilité de l'événement "à l'instant n , la puce est en A " et b_n la probabilité de l'événement "à l'instant n , la puce est en B ".

On suppose que à l'instant initial, elle est en A et on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(Q 2) On note $A := \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \ker(A - I_2) \oplus \ker(A + \frac{1}{2}I_2)$ puis donner la matrice D de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans une base adaptée à cette somme directe. Donner également une égalité reliant les matrices A et D .

(Q 3) En déduire A^n pour tout entier n puis X_n .

(Q 4) Finalement, quelle est la limite de $(a_n)(b_n)$? Interpréter le résultat.

Exercice 8 : Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque :

(a) A et B sont incompatibles;

(b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$;

(c) A et B sont indépendants.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 9 : [corrigé] Dans une loterie, un billet sur n est gagnant. Une personne achète n billets.

1. Quelle est la probabilité pour que cette personne ait un seul billet gagnant ?
 2. Quelle est la probabilité pour que cette personne ait au moins un billet gagnant ?
 3. Calculer les limites des deux probabilités précédentes quand n tend vers l'infini.
-

Exercice 10 : On a cette fois-ci 9 jetons : $\boxed{1}; \boxed{2}; \boxed{3}; \boxed{4}; \boxed{5}; \boxed{6}; \boxed{7}; \boxed{8}; \boxed{9}$. On les retourne, on les mélange. On en tire un premier que l'on retourne, un second que l'on retourne et que l'on place à droite du premier, puis un troisième que l'on retourne et que l'on place à droite du second. Par exemple, une issue est $\boxed{1}; \boxed{5}; \boxed{4}$.

- (Q 1) Comment pourrait-on appeler une issue élémentaire ? Quel espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ peut-on choisir pour modéliser cette expérience aléatoire ?
- (Q 2) Quel est le cardinal de Ω ?
- (Q 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 500 ?
- (Q 4) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre comportant uniquement des chiffres pairs ?
-

Exercice 11 : [corrigé] On tire simultanément six cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :

- (a) six cartes de valeurs différentes ; (b) deux brelans ; (c) une paire et un carré ;
(d) trois paires ; (e) un brelan, une paire et un singleton.
-

Exercice 12 : Pierre et Paul jouent à Pile ou Face. Pour cela, ils lancent chacun n fois leur pièce, $n \geq 1$ et le gagnant est celui qui obtient le plus de pile. On suppose les lancers de chaque personne indépendants et que chaque face a la même probabilité d'apparition.

1. Quelle est la probabilité qu'ils soient ex-aequo ?
 2. Que Pierre gagne ?
-

Exercice 13 : [corrigé] On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
 2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.
-

Exercice 14 : -Test d'une maladie rare- Un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle. La notice précise la qualité du test : Lorsque le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99.8 % des cas. Lorsque le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99.6 % des cas. On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000. Peut-on avoir confiance dans ce test ? Pour cela, on cherche la réponse à la question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

Exercice 15 : [corrigé] Plusieurs joueurs, nommés $J_1, J_2, \dots, J_k, \dots, J_n$ jouent l'un après l'autre dans l'ordre des indices. À chaque joueur $J_1, J_2, \dots, J_k, \dots, J_n$ est imparti un événement précis $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$. Le jeu se termine si aucun des joueurs n'a réalisé l'évènement aléatoire qui lui est imparti. Le premier joueur qui réalise l'évènement aléatoire qui lui est imparti gagne.

On désignera par p_k la probabilité ($0 < p_k < 1$) pour le joueur J_k de réaliser l'évènement A_k . L'évènement " J_k gagne" sera noté G_k et on supposera l'indépendance mutuelle de toutes les suites de résultats des coups joués par les concurrents jusqu'à la fin de la partie. On dit que le jeu est équitable si $P(G_1) = P(G_2) = \dots = P(G_n)$.

1. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $P(G_k) = p_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i) \right)$.
2. Montrer que le jeu est équitable si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, p_{k+1} = \frac{p_k}{1-p_k}$.
3. On pose $r_k = \frac{1}{p_k}$. En supposant le jeu équitable, exprimer r_{k+1} en fonction de r_k , puis p_k en fonction de p_1 .

Exercice 16 : [corrigé] On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu et on note A « la somme vaut 6 » et B « le résultat du dé rouge est pair ». A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 17 : [corrigé] Une famille a n enfants où $n \geq 2$. Nous étudions les événements A : « la famille a des enfants des deux sexes » et B : « la famille a au plus une fille ». Nous supposons que la probabilité P d'avoir une fille est la même que celle d'avoir un garçon.

1. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.
2. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 18 : [solutions] Dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire, on tire successivement avec remise deux boules.

1. On note A l'évènement « on obtient au moins une boule blanche » et B « on obtient au moins une boule noire ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Sachant que l'une des deux boules est blanche, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Indications

Solution de l'exercice 18 :

1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $P_A(B) = \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. $p_1 = k; p_2 = 2k; p_3 = 3k; p_4 = 4k; p_5 = 5k; p_6 = 6k \Rightarrow k = \frac{1}{21}$. Soit $p_1 = \frac{1}{21}; p_2 = \frac{2}{21}; p_3 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}; p_4 = \frac{4}{21}; p_5 = \frac{5}{21}; p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.
2. $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{4}{7}$.

Correction de l'exercice 4 :

(Q 1) CAS $n = 3$.

(a) Par la formule du conditionnement multiple :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &= \mathbb{P}(R_3|B_1 \cap R_2)\mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

(b) On remarque que $E_2 = R_3 \cap B_2 \cap R_1$. L'avenir dépend du passé. On utilise donc les probabilités conditionnelles.

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(R_3|B_2 \cap R_1)\mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9}.$$

De même, $E_3 = B_3 \cap R_2 \cap R_1$. Par la formule du conditionnement multiple,

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(B_3|R_2 \cap R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

(c) On remarque que cet événement s'écrit comme $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{8} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$$

(Q 2) (a) Aidons nous du principe précédent. Cet événement correspond à

$$E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n$$

événements deux à deux incompatibles. Or $E_1 = B_1 \cap R_2 \cdots R_n$, $E_2 = R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cdots R_n$, $\cdots$, $E_k = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cdots R_n$ avec $k \in \{1; \cdots; n\}$. Par la formule du conditionnement multiple :

$$\mathbb{P}(E_k) = \left(\frac{4}{8}\right)^{n-[k+1]+1} \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{5}{9} \left(\frac{4}{8}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

Les événements $(E_1, \cdots; E_n)$ sont deux à deux incompatibles. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=1}^n \frac{5}{9} \left(\frac{4}{8}\right)^{n-k} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{9} \frac{1}{2^n} \times \frac{9}{4} \times \sum_{k=1}^n \left(2 \times \frac{4}{9}\right)^k \\ &= \frac{5}{2^n \times 4} \times \frac{8}{9} \times \frac{1 - (8/9)^n}{1 - 8/9} = \frac{5 \times [1 - (8/9)^n]}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

(b) On utilise l'évènement contraire. La probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est donc égale à

$$p_n = 1 - \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = 1 - (4/9)^n.$$

Ainsi, $p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow (4/9)^n \geq 0,01 \Leftrightarrow n \ln(4/9) \geq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,01)}{\ln(4/9)}$ car $\ln(4/9)$ est négatif. On trouve $n = 6$.

Correction de l'exercice 5 :

(Q 1)

aucun tirage	9 blanches + 1 noire	10
1 tirage avec une blanche	10 blanches + 1 noire	11
2 tirages avec deux blanches	11 blanches + 1 noire	12
k-1 tirages avec k-1 blanches	9+(k-1) blanches + 1 noire	9+k

Si au bout de $k-1$ tirages on n'a obtenu que des boules blanches, on a à l'issue de ces $k-1$ tirages $9+k$ boules dans l'urne. On en déduit que $\mathbb{P}(B_k/B_{k-1}) = \frac{8+k}{9+k}$ pour tout entier $k \geq 1$.

(Q 2) $B_1 \cap \cdots \cap B_k = B_k$. Par la formule du conditionnement multiple,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_k) \\ &= \mathbb{P}(B_k|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1})\mathbb{P}(B_{k-1}|B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(B_1) \\ &= \mathbb{P}(B_k|B_{k-1})\mathbb{P}(B_{k-1}|B_{k-2}) \cdots \mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{8+k}{9+k} \times \frac{7+k}{8+k} \cdots \frac{10}{11} \frac{9}{10} = \frac{9}{9+k}\end{aligned}$$

(Q 3) $\mathbb{P}(N_k/B_{k-1}) = \frac{1}{9+k}$. Par définition,

$$\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(N_k|B_{k-1})\mathbb{P}(B_{k-1}) = \frac{1}{9+k} \times \frac{9}{9+[k-1]} = \frac{9}{(9+k)(8+k)}$$

(Q 4) On simplifie la somme : $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k} = \frac{9+k-(8+k)}{(9+k)(8+k)} = \frac{1}{(9+k)(8+k)}$. Ainsi $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{9}{(9+k)(8+k)} \right) = 9 \times \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k} \right] = 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9+n} \right) = 1 - \frac{9}{9+n}$. La limite est égale à 1. On remarque que les événements $(N_k)_{k \in \{1; \cdots; n\}}$ sont deux à deux incompatibles. Ainsi $S_n = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n N_k)$ représente la probabilité de tirer la boule noire après au plus n tentatives. Cette probabilité tend donc vers 1.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) On note B_n le fait que le message transmis à l'individu n est bruité. Donc $(B_n, \overline{B}_n)$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I_{n+1}) &= \mathbb{P}(I_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{B}_n)\mathbb{P}(\overline{B}_n) \\ &= (1-p_n)p + p_n \times (1-p) = (1-2p)p_n + p\end{aligned}$$

(Q 2) On se retrouve avec une suite linéaire récurrente d'ordre 1. Appliquons notre méthode.



Point fixe. $l = p + (1-2p)l \Leftrightarrow 2pl = p \Leftrightarrow l = 1/2$.



Par théorème, $(p_{n+1} - 1/2) = (1-2p)(p_n - 1/2) \Leftrightarrow p_n - 1/2 = (1-2p)^n(p_0 - 1/2) \Leftrightarrow p_n = 1/2 + \frac{(1-2p)^n}{2}$.

Or $0 < p \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq (1-2p) < 1$. Voici le bilan de notre étude :

- (a) Si $0 < p < 1$, $p_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1/2$
- (b) Si $p = 1$, $p_n \in \{0; 1\}$ et la suite n'a pas de limite. Pensez ici que tout le monde ment.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) On note A_n l'évènement "la puce est en position A à l'instant n ", B_n l'évènement "la puce est en position B à l'instant n ". La famille (A_n, B_n) forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = 1/4 \text{ et } \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) = 3/4$$

$$\text{Donc, } \boxed{a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n}. \text{ De même,}$$

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Nous avons obtenu que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'algèbre linéaire va donc être au service des probabilités...

(Q 2) On note $A := \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \ker(A - I_2) \oplus \ker(A + \frac{1}{2}I_2)$ puis donner la matrice D de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans une base adaptée à cette somme directe. Donner également une égalité reliant les matrices A et D .

- $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1/4 - 1 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix}$.
Donc $(x, y) \in \ker(A - I_2) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, y) = y(1, 1)$. Ainsi, $\ker(A - I_2) = \text{Vect}((1, 1))$. Puis,
 $A + \frac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} 1/4 + \frac{1}{2} & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Donc $(x, y) \in \ker(A + \frac{1}{2}I_2) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, y) = y(-1, 1)$. Ainsi, $\ker(A - I_2) = \text{Vect}((1, 1))$.

- L'intersection de ces deux espaces est réduite au vecteur nul :

► D'une part, $0_{\mathbb{R}^2}$ est un élément de ces deux espaces puisque ce sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

► D'autre part, soit $(x, y) \in \ker(A + \frac{1}{2}I_2) \cap \ker(A - I_2) \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a montré que

$$\ker(A + \frac{1}{2}I_2) \cap \ker(A - I_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Puis, $\dim(\ker(A + \frac{1}{2}I_2)) + \dim(\ker(A - I_2)) = 1 + 1 = 2$. Par théorème, les espaces sont supplémentaires. ON CHOISIT $B' = ((1, 1), (-1, 1))$ une base adaptée à cette somme directe. On POSE par conséquent :

$$D = M(f)_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

avec f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Par propriété,

$$M(f)_{B_c}^{B_c} = P_{B_c}^{B'} M(f)_{B'}^{B'} P_{B'}^{B_c}$$

Par définition, $P_{B_c}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{B'}^{B_c} = (P_{B_c}^{B'})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement,

$$\boxed{A = PDP^{-1}; \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(Q 3) Par récurrence, montrons que pour tout entier n , $A^n = PD^nP^{-1}$ et que $X_n = A^nX_0$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $A^0 = I_2$, $D^0 = I_2$ donc $PD^0P^{-1} = I_2$. De plus, $X_0 = A^0X_0$, ce qui prouve l'initialisation.
- **Hérédité** : Si $A^n = PD^nP^{-1}$ (Hypothèse de récurrence) et $X_n = A^nX_0$, alors : $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$ (d'après l'hypothèse de récurrence). Or : $A = PDP^{-1}$ donc : $PD^nP^{-1}A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. De plus, $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.
Ce qui prouve l'hérédité.

(Q 4) Finalement,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(1/2)^n \\ 1 & (1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$a_n = 1/2 + (1/2)^{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1/2;$$

$$b_n = 1/2 - (1/2)^{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1/2$$

Les deux suites (a_n) , (b_n) convergent vers $1/2$.

Correction de l'exercice 9 :

Nous pouvons modéliser le problème comme suit : Pour $E = \{G, P\}$ (G pour gagnant et P pour perdant), on prend pour univers Ω l'ensemble des n -listes d'éléments de E . On suppose de plus les tirages des billets indépendants, c'est à dire toute famille d'événements A_i , dont la réalisation ne dépend que du i -ème tirage, sont mutuellement indépendants. Une telle hypothèse peut être discutable, mais raisonnable si le nombre de billets tirés par la loterie est bien plus grand que n , ce que nous supposons par la suite. Enfin l'énoncé nous dit que l'événement A_i : "Le i -ème billet est gagnant" a pour probabilité $\frac{1}{n}$.

- Notons A l'événement : "La personne a un seul billet gagnant" et G_i l'événement : "Seul le i -ème billet est gagnant". Il est clair que $A = \bigcup_{i=1}^n G_i$. D'autre part $G_i = \left(\bigcap_{j \neq i} \overline{A_j} \right) \cap A_i$. Par indépendance des tirages, on en déduit : $P(G_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$. Enfin, les événements G_i étant mutuellement indépendants, $P(A) = \sum_{i=1}^n P(G_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
- Notons B l'événement : "La personne a au moins un billet gagnant". Puisque $\overline{B} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$, et par indépendance des tirages, $P(\overline{B}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, donc $P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
- Nous verrons ultérieurement que la suite de terme général $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ converge vers $\frac{1}{e} \approx 0,3679$. Même chose si l'en remplace le $n-1$ en exposant par n , donc $P(B)$ converge vers $1 - 1/e \approx 0,6321$.

Correction de l'exercice 11 :

On tire simultanément six cartes d'un jeu de 52 cartes. L'univers à considérer est donc l'ensemble des combinaisons de 6 éléments de l'ensemble E des 52 cartes, que l'on munit de la probabilité uniforme.

- Une fois les valeurs fixées, nous avons 4 choix de cartes pour chaque valeur, donc 4^6 cartes différentes en tout. Il reste à dénombrer le nombre de valeurs possibles que l'on peut tirer. Puisque dans un jeu de 52 cartes nous avons 13 valeurs différentes, le nombre correspondant est $\binom{13}{6}$. Finalement, la probabilité recherchée est : $\frac{\binom{13}{6} 4^6}{\binom{52}{6}}$.
- Une fois les valeurs de chaque brelan fixées, le nombre

de cartes possibles est $\binom{4}{3} = 4$ pour chaque brelan. Il reste à dénombrer le nombre de choix de valeurs pour chaque brelan. Ce nombre est $\binom{13}{2}$, et par conséquent la probabilité recherchée est : $\frac{\binom{13}{2} 4^2}{\binom{52}{6}}$.

- Une fois les valeurs fixées, on a $\binom{4}{2} = 6$ choix de cartes pour la paire et 1 seul choix pour le carré. Il reste à dénombrer le nombre de choix de valeurs différentes pour la paire et le carré. **À la différence de la question précédente**, ce nombre n'est plus $\binom{13}{2}$ mais 13×12 . Ainsi, la probabilité recherchée est : $\frac{13 \times 12 \times 6}{\binom{52}{6}}$.
- Les raisonnements sont similaires à la question 2 : $\binom{13}{3}$ choix de valeurs différentes pour les paires et une fois les valeurs fixées, 6 choix de cartes pour chaque paire. La probabilité est donc : $\frac{\binom{13}{3} 6^3}{\binom{52}{6}}$.
- Les raisonnements sont similaires à la question 3 : $13 \times 12 \times 11$ choix de valeurs différentes pour le brelan, la paire et le singleton, et une fois les valeurs fixées, 4 choix de cartes le brelan, 6 choix pour la paire et 4 choix pour le singleton. La probabilité est donc : $\frac{13 \times 12 \times 11 \times 96}{\binom{52}{6}}$.

Correction de l'exercice 13 :

On commence par modéliser le problème : pour E l'ensemble des 365 jours de l'année, l'univers Ω à considérer est l'ensemble des n -listes d'éléments de E , que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On suppose par ailleurs $n \leq 365$, ce qui semble raisonnable.

- Notons A l'événement : « deux élèves au moins de cette classe ont leur anniversaire le même jour ». L'événement $\overline{A}$ est : « tous les élèves sont nés un jour différent ». Le cardinal de cet événement correspond au nombre d'arrangements de n éléments parmi 365, donc est égal à $\frac{365!}{n!}$. On en déduit $p = \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{n!(365)^n}$. Avec Python par exemple, on peut calculer la valeur de P pour certaines valeurs de n : pour $n = 23$ cette probabilité vaut approximativement 0,507. Pour l'effectif de cette classe, à savoir $n = 48$, $p \approx 0,960$.
- Notons B l'événement « au moins un élève est né le même jour que le professeur ». Comme précédemment, on calcule la probabilité de son complémentaire, qui est l'événement « aucun élève n'est né le

même jour que le professeur ». Il y a donc 364 jours possibles pour chaque élève, soit $P(\overline{B}) = \left(\frac{364}{365}\right)^n$ puis $P(B) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. On voit facilement que $P(B) \geq 0,5 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(364/365)} \approx 252.6520$. Ce nombre est bien plus grand que pour la question précédente, et pour $n = 48$, $P(B) = 0,123$.

Correction de l'exercice 15 :

1. Nous avons : $G_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} {}^c A_i\right) \cap A_k$. En utilisant l'hypothèse d'indépendance de toutes les suites de résultats de coups joués, nous obtenons : $P(G_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P({}^c A_i)\right)P(A_k) = p_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p_i)$.
2. Si le jeu est équitable, nous en déduisons $P(G_{k+1}) = P(G_k)$. Puisque $P(G_k) \neq 0$, nous pouvons diviser par $P(G_k)$ ce qui donne : $1 = \frac{P(G_{k+1})}{P(G_k)} = \frac{p_{k+1}(1 - p_k)}{p_k}$.
Réciproquement, si $\frac{p_{k+1}(1 - p_k)}{p_k} = 1$, on obtient $1 = \frac{P(G_{k+1})}{P(G_k)}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $P(G_1) = P(G_2) = \dots = P(G_n)$.
3. On vérifie facilement que $r_{k+1} = r_k - 1$, ainsi la suite de terme général r_k est arithmétique de raison 1. Puisque $r_1 = \frac{1}{p_1}$, on en déduit $r_k = \frac{1}{p_1} - (k-1)$, d'où $p_k = \frac{1}{1 - (k-1)p_1}$.

nable de penser que pour $n \geq 4$, $2^{n-1} > n+1$. Montrons cette dernière égalité. D'après le binôme de Newton, $2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \binom{n-1}{k}$.

Remarquons que la dernière somme n'est pas vide puisque $n-1 \geq 3$. Il s'ensuit $\sum_{k=3}^{n-1} \binom{n-1}{k} > 0$.

Enfin $1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n+1 + \frac{1}{2}n(n-3) > n+1$ car $n-3 \geq 1$, d'où le résultat.

$\begin{array}{ccc} \star & \star & \star \\ & \star & \star \\ & & \star \end{array}$

Correction de l'exercice 16 :

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{3}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Correction de l'exercice 17 :

Pour $E = \{G, F\}$, l'univers Ω que nous considérons est l'ensemble des n -listes d'éléments de E , que l'on munit de la probabilité uniforme P . Nous avons $\#(\Omega) = 2^n$.

1. L'évènement $A \cap B$ est : "La famille a exactement une fille". On a n façons de placer F , le cardinal de A est donc n et $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$. Pour calculer le cardinal de A , nous remarquons que ${}^c A$ est l'union disjointe des évènements "La famille n'a que des garçons" et "La famille n'a que des filles". Ces derniers ont pour cardinal 1 et finalement $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Enfin, B est l'union disjointe de "La famille n'a aucune fille" et "La famille n'a qu'une seule fille", chaque évènement a déjà été considéré auparavant, et $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
2. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ c'est à dire, après simplification de l'expression, $n+1 = 2^{n-1} (*)$. Pour $n = 2$ la relation $(*)$ n'est pas vérifiée, elle l'est effectivement pour $n = 3$. Il reste à voir qu'elle n'est jamais vérifiée pour $n \geq 4$. En effet, il est raison-