TD 10

Primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1

LES INCONTOURNABLES

Calcul d'intégrales

Exercice 1 : [solutions] Déterminer une primitive des fonctions d'expressions suivantes sur l'intervalle proposé :

(a) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}},\ I=\mathbb{R}_+^*$; (b) $\dfrac{x+2}{x},\ I=\mathbb{R}_-^*$; (c) $\dfrac{x}{x+2},\ I=\mathbb{R}_-^*-\{-2\}$; (d) $\dfrac{x}{2x+1},\ I=\left]-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right[$;

Exercice 2 : [solutions] Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous sur l'intervalle proposé :

(a) $x\mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x},\ I=\mathbb{R}_+^*$;

(b) $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}; I=\mathbb{R}_+$;

(c) $x\mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\big(\text{Arctan}(x)\big)^4}$;

(d) $x\mapsto \frac{x}{(3x^2+1)^5}, I=\mathbb{R}$;

(e) $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}, I=]0;1[$;

(f) $x\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}; I=]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$;

Exercice 3 : [corrigé] **Avec les fonctions trigonométriques.**

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3(x)\cos(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt.$

Exercice 4 : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en précisant l'intervalle sur lequel vous le faites. *Effectuer une intégration par parties.*

(a) $(x^2-x+3)e^{2x}$; (b) $(x^2+1)\ln(x)$; (c) $\text{Arcsin}(x)$.

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+6x-7}$; (b) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x^2+4x}$; (c) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{3x^2+4}$; (d) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+4}$; (e) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

Exercice 6 :

Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(e^x+1)^2}$. (*indication : après avoir effectué un changement de variable, on pourra chercher une décomposition de la forme :* $\dfrac{1}{X(X+1)^2}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{(X+1)^2}$)

Exercice 7 : [corrigé] *Avec un changement de variables.*

(Q 1) Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé :

(Q a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, $I = \mathbb{R}_+^*$ (poser $u = \sqrt{x}$); (Q b) $\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$ (poser $u = \sqrt{x+1}$);

(Q 2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t + t(\ln t)^2}\, dt$ (poser $u = \ln(t)$).

Exercice 8 : [corrigé] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\, dt$.

(Q 1) Calculer la dérivée de la fonction $g(t) = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$. En déduire I_0.

(Q 2) Calculer I_1.

(Q 3) Montrer que $I_{n+2} + I_n = J_n$.

(Q 4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)J_n.$$

(Q 5) Déduire des questions précédentes, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n, puis calculer I_2 et I_3.

Équations différentielles

Exercice 9 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' - 2\dfrac{x}{1+x^2}y = 1$; (b) $y' + \dfrac{2x-1}{x^2}y = \dfrac{1}{x^4}$;

(c) $xy' + y = x^2e^x,\ I = \mathbb{R}_+^*$; (d) $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$;

POUR S'ENTRAÎNER

Calcul d'intégrales

Exercice 10 : [solutions] Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous sur l'intervalle proposé :

(a) $x \mapsto \dfrac{-4x}{1+x^2},\ I = \mathbb{R}$;

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}, I = \mathbb{R}_+$;

(c) $x \mapsto \mathrm{sh}(4x),\ I = \mathbb{R}$;

(d) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\mathrm{Arcsin}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}, I = [0;1[$;

(e) $x \mapsto x^2 e^{x^3+1}, I = \mathbb{R}$.

Exercice 11 : [corrigé] **Avec les fonctions trigonométriques.** Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous sur l'intervalle proposé :

(a) $x \mapsto \sin^4(x),\ I = \mathbb{R}$;

(b) $x \mapsto \tan^2(x), I =]0; -\frac{\pi}{2}[$.

Exercice 12 : [corrigé] **Avec les fonctions trigonométriques.** Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(1+\tan(t)\big)^2\,dt$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3t)\cos(2t)\,dt$.

Exercice 13 : [corrigé] **Avec les fonctions hyperboliques**

(Q 1) Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous sur l'intervalle proposé :

(a) $x \mapsto \mathrm{sh}^4(x), I = \mathbb{R}$ (Linéariser)

(b) $x \mapsto e^x\mathrm{ch}(x), I = \mathbb{R}$.

(Q 2) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}^2(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^9(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{ch}^2(x)\mathrm{sh}^2(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^3(x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}^3(x)\,dx$

Exercice 14 : Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en précisant l'intervalle sur lequel vous le faites. *Effectuer une intégration par parties.*

(a) $x^2\cos(x)$; (b) $(\ln(x))^2$; (c) $x\mathrm{ch}(x)$; (d) $(2x-3)\sin(x)$.

Exercice 15 : [corrigé] Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en utilisant la technique du cours **sur les fonctions rationnelles.**

(a) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$;

(b) $\dfrac{1}{x(x+1)}$;

(c) $\dfrac{1}{x^2-2x+26}$;

(d) $\dfrac{1}{x^2-2x-1}$;

(e) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}$;

(f) $\dfrac{x}{4x^2+4x+1}$;

(g) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$;

(h) $\dfrac{9}{x^2-9x}$;

(i) $\dfrac{1}{x^2+4}$;

(j) $\dfrac{1}{1-3x+\frac{9}{2}x^2}$;

(k) $\dfrac{x}{x^2+3x-10}$.

Exercice 16 : On considère : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

1. Montrer que $I = a \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2+1)^2}$, avec $a \in \mathbb{R}$ à préciser.
2. En posant $u = \tan(t)$ en déduire la valeur de I.

Exercice 17 : [corrigé] *Avec un changement de variables.*

(Q 1) Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé :

(Q a) $\dfrac{x^5}{1+x^{12}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$; (Q b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $I = \mathbb{R}$.

(Q 2) Calculer les intégrales suivantes :

(Q a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}\, dt$; (Q b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t - 2 + 3e^{-t}}\, dt$.

Exercice 18 : [solutions] En justifiant leur existence préalablement, puis en effectuant le changement de variable proposé, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)}\, dx$.

(poser $u = \cos(x)$) (poser $u = \sin(x)$) (poser $u = \tan(x)$).

Exercice 19 : [solutions] Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\, dx$. Calculer $I+J$ puis $I-J$. En déduire I et J.

Équations différentielles

Exercice 20 : [solutions] Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 4xy = x$; (b) $y' + \frac{1}{x^2}y = e^{1/x}$;

(c) $y' + \tan(x)y = \cos(x)$ $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$; (d) $xy' - y = x\ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$;

(e) $(1-x^2)y' + 2xy + 2x = 0$.

Exercice 21 : [indications] Trouver les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$$

DIVERS

Exercice 22 : [corrigé]

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin(nt)|\,dt$.

1. Montrer que : $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-u/n}|\sin(u)|\,du$.
2. Pour tout $k \in [\![0;\ n-1]\!]$, on pose : $a_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-u/n}|\sin(u)|\,du$.
   (a) Calculer a_k à l'aide du changement de variable : $w = u - k\pi$.
   (b) Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \int_0^{n\pi} e^{-u/n}|\sin(u)|\,du$.
   (c) En déduire une expression simple de I_n.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-e^{-\pi/n}) = \pi$ et en déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 23 :

Un parachutiste de masse m saute d'un hélicoptère positionné à une distance h du sol et sans vitesse initiale. L'objectif est de déterminer explicitement sa vitesse ainsi que l'expression de sa position en fonction du temps.

1. Premier modèle. On suppose que la force des frottements de l'air est linéaire : $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de l'objet et k une constante dépendant du corps. Par exemple, si le corps est une sphère, $k = 6\pi\eta R$ avec R le rayon de la sphère et η la constante de viscosité du fluide, celui de l'air étant égal à $\eta = 2\times 10^{-5} kg.s^{-1}.m^{-1}$. Dans ce cas, en appliquant le principe fondamental de la dynamique :
$$m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a}$$
soit $mz''(t) + kz'(t) = mg$. On note $\tau = \frac{m}{k}$.
   (a) Donner le problème de Cauchy vérifiée par la fonction v. Le résoudre.
   (b) En déduire l'expression z.
2. Second modèle. On suppose que la force des frottements de l'air est quadratique : $\overrightarrow{f} = -k'v\overrightarrow{v}$ avec $k' = \frac{1}{2}\eta S C_x$ où S la surface frontale de l'objet, C_x le coefficient de traîné, η le coefficient de viscosité du fluide. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient :
$$m\overrightarrow{g} - k'v\overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a},$$
ce qui s'écrit encore : (E) $v'(t) + \frac{k'}{m}v^2 = g$. On note $\tau = \frac{m}{k'}$.
   (a) Pourquoi cette équation n'est-elle pas linéaire ?
   (b) Trouver une solution particulière constante à cette équation différentielle. On la note v_p.
   (c) On note v une solution de (E) et on pose $w = v + v_p$. Montrer que w est solution de l'équation
$$y' + \frac{1}{\tau}y^2 - 2\sqrt{\frac{g}{\tau}}\,y = 0$$

(d) Finalement, on pose $u = \frac{1}{w}$. Montrer que u est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(e) En déduire que : $v(t) = \sqrt{g\tau}\dfrac{1 - e^{-2t\sqrt{g/\tau}}}{1 + e^{-2t\sqrt{g/\tau}}} = \sqrt{g\tau}\dfrac{\sinh(t\sqrt{g\tau})}{\cosh(t\sqrt{g\tau})}$.

(f) Déterminer alors l'expression de z.

Indications

Exercice 21 : Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = \cos(x) - \sin(x)$.

Solution de l'exercice 1 :

(a) $\dfrac{4}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x}$;
(b) $x + 2\ln(-x)$;
(c) $x - 2\ln(x+2)$ si $x \in]-2;0[$ et $x - 2\ln(-x-2)$ sinon;
(d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\ln(2x+1)$.

Solution de l'exercice 2 :

(a) $\ln(x^2+x)$.
(b) $\ln(e^x+1)$.
(c) $\dfrac{-1}{3(\mathrm{Arctan}(x))^3}$.
(d) $\dfrac{1}{-24}\dfrac{1}{(3x^2+1)^4}$.
(e) $\ln(-\ln(x))$.
(f) $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

Solution de l'exercice 4 :

(a) $e^{2x}(\frac{x^2}{2} - x + 2)$, (b) $[\frac{x^3}{3} + x]\ln(x) - \frac{x^3}{9} - x$, (c) $x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$,

Solution de l'exercice 9 :

(a) $S = \{(1+x^2)(\mathrm{Arctan}(x) + C),\ C \in \mathbb{R}\}$,

(b) $S = \left\{\dfrac{Ce^{-1/x} - 1}{x^2},\ C \in \mathbb{R}\right\}$ sur $]0;\ +\infty[$ et $]-\infty;\ 0[$,

(c) $S = \left\{\dfrac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}{x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,

(d) $S = \{(1-x)\left(C + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right),\ C \in \mathbb{R}\}$ sur $]-\infty;1[$ et $]1;\ +\infty[$,

$S = \{(1-x)\left(C + \ln\left(-1 + \frac{1}{x}\right)\right),\ C \in \mathbb{R}\}$ sur $]-1;\ 1[$.

Solution de l'exercice 10 :

(a) $-2\ln(1+x^2)$.
(b) $x - \ln(e^x+1)$.
(c) $\dfrac{1}{4}\mathrm{ch}(4x)$.
(d) $\dfrac{2}{3}\Big(\mathrm{Arcsin}(x)\Big)^{3/2}$.
(e) $\frac{1}{3}e^{x^3+1}$.

Solution de l'exercice 14 :

(a) $x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$,
(b) $x\ln(x)^2 - 2(x\ln(x) - x)$,
(c) $x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)$, (d) $\cos(x)(3-2x) + 2\sin(x)$.

Solution de l'exercice 18 :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{4}$;
(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$;
(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \ln(2)$.

Solution de l'exercice 19 :

$I + J = 1$. $I - J = \frac{1}{2}\ln(2)$ $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(2)$ et $J = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(2)$.

Solution de l'exercice 20 :

(a) $S = \left\{Ce^{-2x^2} + \frac{1}{4},\ C \in \mathbb{R}\right\}$,

(b) $S = \left\{(C+x)e^{1/x},\ C \in \mathbb{R}\right\}$ sur $]0;\ +\infty[$ et $]-\infty;\ 0[$,

(c) $S = \{\cos(x)(x+C),\ C \in \mathbb{R}\}$,

(d) $S = \left\{x\left(C + \dfrac{\ln(x)^2}{2}\right),\quad C \in \mathbb{R}\right\}$,

(e) $S = \{C(x^2-1) - 1,\ C \in \mathbb{R}\}$ sur $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 1[$, $]1;\ +\infty[$,

Correction de l'exercice 3 :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)u(x)^3(x)\,dx$, avec $u(x) = \sin(x)$. Or $\displaystyle\int u'u^3 = \frac{1}{4}u^4$. On en déduit : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos(x)\,dx = [\frac{\sin^4(x)}{4}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$

(b) $\sin^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{1}{4}\sin(2t)^2$. Or $\sin^2(u) = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$ donc : $\sin^2(t)\cos^2(t) = \dfrac{1}{8}(1-\cos(4t)) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\cos(4t)$.
On en déduit : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\,dt - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t)\,dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) (Q a) Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, posons $t = \sqrt{u} \Leftrightarrow ut^2$. Alors $\varphi : t \mapsto t^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(t) = 2t$. On en déduit par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)}\,du &= \int_a^{\sqrt{x}} \frac{\varphi'(t)}{t(1+t^2)}\,dt \ . \\ &= 2\int_a^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 2\text{Arctan}(\sqrt{x}) \\ &\quad -2\text{Arctan}(\sqrt{a}).\end{aligned}$$

(Q b) Pour $u \in]-1;\ +\infty[$, posons $t=\sqrt{u+1} \Leftrightarrow u=t^2-1$. Alors $\varphi : t \mapsto t^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(t)=2t$. On en déduit par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{1}{u\sqrt{u+1}}\,du &= \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t^2-1)t} \\ &= \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \frac{2}{t^2-1}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}\right)dt \\ &\quad A+B=0,\ A-B=2 \\ &= \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{t-1}\,dt + \int_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{t+1}\,dt \\ (A=-B=1) & \\ &= [\ln|t-1|-\ln|t+1|]_{\sqrt{a+1}}^{\sqrt{x+1}} \\ &= \ln\left(\tfrac{|\sqrt{x+1}-1|}{|\sqrt{x+1}+1|}\right) - \ln\left(\tfrac{|\sqrt{x+1}-1|}{|\sqrt{x+1}+1|}\right).\end{aligned}$$

(Q c) Posons $t=\sqrt{e^u+1} \Leftrightarrow u=\ln(t^2-1)$. Alors $\varphi : t \mapsto \ln(t)$ est de classe C^1 sur $]1;\ +\infty[$ et $\forall \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(t)=\dfrac{2t}{t^2-1}$. On en déduit par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{1}{u\sqrt{u+1}}\,du &= \int_{\sqrt{e^a+1}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{t+1}} \\ &= [\int \frac{2dt}{t^2-1}]_{\sqrt{e^a+1}}^{\sqrt{e^x+1}} \\ &= [\ln|t-1|-\ln|t+1|]_{\sqrt{e^a+1}}^{\sqrt{e^x+1}},\ \text{(cf (Qc))} \\ &= \ln\left(\tfrac{|\sqrt{e^x+1}-1|}{|\sqrt{e^x+1}+1|}\right) - \ln\left(\tfrac{|\sqrt{e^a+1}-1|}{|\sqrt{e^a+1}+1|}\right).\end{aligned}$$

.

(Q 2) Posons $u=\ln(t) \Leftrightarrow t=e^u$. Alors $\varphi : u \mapsto e^u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(u)=e^u$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}\,dt &= \int_0^1 \frac{ue^u}{e^u+e^u\times u^2}\,du \\ &\quad t=1 \Rightarrow u=0,\ t=e \Rightarrow u=1 \\ &= \int_0^1 \frac{u}{u^2+1}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{2u}{u^2+1}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}[\ln(u^2+1)]_0^1 \\ &= \ln(2)/2.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q1) Soit g la fonction définie par : $g(t)=\ln(t+\sqrt{t^2+1})$, on constate par opérations élémentaires que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \dfrac{u'(t)}{u(t)}$, avec : $u(t)=t+\sqrt{t^2+1}$, donc $u'(t)=1+\dfrac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}$. Ainsi, $g'(t)=\dfrac{\cancel{t+\sqrt{t^2+1}}}{\sqrt{t^2+1}} \times \dfrac{1}{\cancel{t+\sqrt{t^2+1}}} = \dfrac{1}{t^2+1}$.

On en déduit : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 g'(t)\,dt = [g(t)]_0^1 = g(1)-g(0) = \boxed{\ln(1+\sqrt{2}).}$

Par conséquent,

$I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^0}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = [\ln(t+\sqrt{t^2+1})]_0^1 = \boxed{\ln(1+\sqrt{2}).}$

(Q2) $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}$, avec $u(t)=t^2+1$. Ainsi, $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \sqrt{t^2+1}$. On en déduit :

$I_1 = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2}-1.}$

(Q3)
$$\begin{aligned} I_{n+2}+I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt \\ &= \int_0^1 t^n \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\ &= \int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\,dt \\ &= \boxed{J_n.}\end{aligned}$$

(Q4) $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^{n+1}}_{u} \underbrace{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}_{v'}\,dt$. Posons : $u(t)=t^{n+1}$ et $v(t)=\sqrt{t^2+1}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0;\ 1]$ et : $\forall t \in [0;\ 1], u'(t)=(n+1)t^n$. Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[t^{n+1}\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\sqrt{t^2+1}\,dt \\ &= \sqrt{2}-(n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\,dt \\ &= \boxed{\sqrt{2}-(n+1)J_n.}\end{aligned}$$

(Q5) Des deux questions précédentes, nous déduisons : $I_{n+2}=\sqrt{2}-(n+1)[I_{n+2}+I_n]$. Ainsi : $(n+2)I_{n+2} = \sqrt{2}-(n+1)I_n$, donc :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{1}{n+2}\left(\sqrt{2}-(n+1)I_n\right).}$$

En particulier :

- Pour $n=0$, $I_2 = \boxed{\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2});}$
- pour $n=1$, $I_3 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2}{3}.}$

Correction de l'exercice 11 :

(a) $\sin^4(x) = \frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$; $F(x) = \frac{\sin(4x)}{32} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8}$

(b) $\tan^2(x) = 1+\tan^2(x)-1$; $F(x)=\tan(x)-x$.

Correction de l'exercice 12 :

(a) $\Big(1+\tan(t)\Big)^2 = 1+\tan^2(t)+2\tan(t)$. Donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(1+\tan(t)\Big)^2\,dt = [\tan(t)+2\ln(\cos(t))]_0^{\pi/4} = 1+\ln(2)$.

(b) $\sin(3t)\cos(2t) = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(5t)+\sin(t)\Big)$. La valeur de l'intégrale est donc : $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 13 :

(Q 1) (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}^4(x) &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4x}-4e^{3x}e^{-x}+6e^{2x}e^{-2x}-4e^xe^{-3x}+e^{-4x}}{16} \\
&= \frac{e^{4x}+e^{-4x}-4(e^{2x}+e^{-2x}+6)}{16} \\
&= \tfrac{1}{16}\Big(2\mathrm{ch}(4x)+8\mathrm{ch}(2x)+6\Big) \\
&= \tfrac{\mathrm{ch}(4x)}{8}+\tfrac{\mathrm{ch}(2x)}{2}+\tfrac{3}{8}
\end{aligned}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int \mathrm{sh}^4(x)\,dx = \frac{\mathrm{sh}(4x)}{32}+\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$.

(b) $e^x\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{2x}+1}{2}$, $\int e^x\mathrm{ch}(x)\,dx = \frac{e^{2x}}{4}+\frac{x}{2}$.

(Q 2) (a) $\int_0^1 \mathrm{ch}^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\Big(2\mathrm{ch}(2x)+2\Big)\,dx = \frac{1}{2}[\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2}+x]_0^1 = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{sh}(2)+2\Big)$.

(b) $\int_0^1 \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^9(x)\,dx = [\frac{1}{10}\mathrm{ch}^{10}(x)]_0^1 = \frac{\mathrm{ch}^{10}(1)-1}{10}$.

(c) $\mathrm{ch}^2(x)\mathrm{sh}^2(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{ch}(2x)^2 = \dfrac{1}{8}(\mathrm{ch}(4x)+2)$. La valeur de l'intégrale est donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{ch}(4)-1}{40}}$.

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^3(x)\,dx = \left[\frac{\mathrm{ch}^4(x)}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{\mathrm{ch}^4(1)}{2}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}^3(x)\,dx = \left[\frac{\mathrm{sh}^4(x)}{4}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{sh}^4(1)}{4}$.

Correction de l'exercice 15 :

(a)
$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{u^2-2u+2}\,du &= \int_a^x \frac{1}{(u-1)^2+1}\,du \\
&= \int_{a-1}^{x-1}\frac{1}{t^2+1}\,dt \quad (t=u-1) \\
&= \mathrm{Arctan}(x-1)-\mathrm{Arctan}(a-1)
\end{aligned}.$$

(b)
$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{u(u+1)}\,du &= \int_a^x\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)dx \\
&= \int_a^x \frac{du}{u}-\int_1^x\frac{du}{u+1} \quad \text{(linéarité)} \\
&= \ln(|x|)-\ln(|x+1|)+\ln|a+1|-\ln|
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{u^2-2u+26}\,du &= \int_0^x \frac{1}{(u-1)^2+5^2}\,du \\
&= \int_{-1}^{x-1}\frac{1}{t^2+5^2}\,dt \ (t=u-1) \\
&= \left[\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{5}\right)}{5}\right]_{-1}^{x-1} \\
&= \frac{\mathrm{Arctan}(\frac{x-1}{5})}{5}+\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)}{5}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{u^2-2u-1}\,du &= \int_a^x \frac{du}{(u-1+\sqrt{2})(u-1-\sqrt{2})} \\
&= \int_a^x\left(\frac{A}{u-1-\sqrt{2}}+\frac{B}{u-1+\sqrt{2}}\right)du \\
&\quad ,A=-B, A-B=\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \int_a^x \frac{A\,du}{u-1-\sqrt{2}}+\int_a^x\frac{B\,du}{u-1+\sqrt{2}} \\
&\quad ,A=-B=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_a^x\frac{du}{u-1-\sqrt{2}}-\int_a^x\frac{du}{u-1+\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(|x-1-\sqrt{2}|)-\ln(|x-1+\sqrt{2}| \\
&\quad -\ln(|a-1-\sqrt{2}|)+\ln(|a-1+\sqrt{2}|)\Big).
\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{1}{u^2-6u+9}\,du &= \int_a^x \frac{du}{(u-3)^2} \\
&= \frac{-1}{x-3}+\frac{1}{a-3}
\end{aligned}$$

car une primitive de $\dfrac{w'}{w^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est $-\dfrac{1}{w}$, $w=x-3$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{u}{4u^2+4u+1}\,du &= \int_a^x \frac{u}{(2u+1)^2}\,du \\
&= \int_a^x \frac{u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(2u+1)^2}\,du \\
&= \int_a^x \frac{\frac{1}{2}(2u+1)-\frac{1}{2}}{(2u+1)^2}\,du \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\int_a^x\frac{du}{2u+1}-\int_a^x\frac{du}{(2u+1)^2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\int_a^x\frac{\frac{1}{2}w'(u)}{w(u)}\,du-\int_a^x\frac{\frac{1}{2}w'(u)}{w^2(u)}\,du\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(\ln(|2x+1|)-\frac{1}{2x+1} \\
&\quad -\ln(|2a+1|)+\frac{1}{2a+1}\Big).
\end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{u^2+2u+2}\,du &= \int_0^x \frac{1}{(u+1)^2+1}\,du \\
&= \int_1^{x+1}\frac{1}{t^2+1}\,dt, (t=u+1) \\
&= \mathrm{Arctan}(x+1)-\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(h) $\displaystyle\int_a^x \frac{9}{u^2-9u}\,du = \int_a^x \frac{9\,du}{u(u-9)} = \int_a^x \left(\frac{1}{u-9}-\frac{1}{u}\right)du = \int_a^x \frac{du}{u-9} - \int_a^x \frac{du}{u} = \ln(|x-9|)-\ln(|x|) - \ln(|a-9|)+\ln(|a|).$

(i) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{u^2+4}\,du = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(\frac{x}{2})$

(j)

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1-3u+\frac{9}{2}u^2}\,du &= \int_0^x \frac{1}{\frac{9}{2}(u^2-\frac{2}{3}u+\frac{2}{9})}\,du\\ &= \frac{2}{9}\int_0^x \frac{1}{\left(u-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}}\,du\\ &= \frac{2}{9}\int_{-1/3}^{x-1/3} \frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\,dt,\ (t=x-\frac{1}{3})\\ &= \frac{2}{9}\left[\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{3}}\right]_{-1/3}^{x-1/3}\\ &= \frac{2\mathrm{Arctan}(3x-1)}{3}+\frac{2\mathrm{Arctan}(1)}{3}.\end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{u}{u^2+3u-10}\,du &= \int_a^x \frac{\frac{1}{2}(2u+3)-\frac{3}{2}}{u^2+3u-10}\,du\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\int_a^x \frac{w'(x)}{w(x)}\,dx - 3\int_a^x \frac{1}{u^2+3u-10}\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{du}{u^2+3u-10} &= \int_a^x \frac{1}{(u-2)(u+5)}\,du\\ &= \int_a^x \left(\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+5}\right)du\\ &A+B=0, -2A+5B=1\\ &= \tfrac{1}{7}\left(-\int_a^x \frac{du}{u-2}\int_a^x \frac{du}{u+5}\right)\\ &B=-A=\tfrac{1}{7}\\ &= -\frac{\ln|x-2|}{7}+\frac{\ln|x+5|}{7} + \frac{\ln|a-2|}{7}-\frac{\ln|a+5|}{7}.\end{aligned}$$

On en déduit au final :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{u}{u^2+3u-10}\,du &= \tfrac{1}{2}\left(\int_a^x \frac{w'(u)}{w(u)}\,du - 3\int_a^x \frac{du}{u^2+3u+10}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x^2+3x-10| - \tfrac{1}{2}\ln|a^2+3a-10|\\ &\quad+\frac{3\ln|x-2|}{14}-\frac{3\ln|x+5|}{14}\\ &\quad-\frac{3\ln|a-2|}{14}-\frac{3\ln|a+5|}{14}\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|(x-2)(x+5)|\\ &\quad+\frac{3\ln|x-2|}{14}-\frac{3\ln|x+5|}{14}+C\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x-2|+\tfrac{1}{2}\ln|x+5|\\ &\quad+\frac{3\ln|x-2|}{14}-\frac{3\ln|x+5|}{14}+C\\ &= \tfrac{5}{7}\ln(|x-2|)+\tfrac{2}{7}\ln(|x+5|)+C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 17 :

(Q 1) (Q a) Posons : $w(u)=u^6$. Alors u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{u^5}{1+u^{12}}\,du &= \tfrac{1}{6}\int_0^x \frac{w'(u)}{1+w(u)^2}\,du\\ &= \tfrac{1}{6}\int_0^{x^6} \frac{dt}{1+t^2},\ (t=w(u))\\ &= \frac{\mathrm{Arctan}(x^6)}{6}.\end{aligned}$$

(Q 2) (Q a) Posons $x=\cos(t)$. Alors : $\varphi : t\mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ et $\forall t\in\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$, $\varphi'(t) = -\sin(t)$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}\,dt &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{\cos(t)}}\sin(t)\,dt\\ &= -\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2(t)}{\sqrt{\cos(t)}}(-\sin(t))\,dt\\ &= -\int_0^{\pi/3} \frac{1-\varphi^2(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\,dt\\ &= -\int_1^{1/2} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}}\,dx\\ &t=0\to x=1, t=\tfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=0\\ &= \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_0^1 x^{3/2}\,dx\\ &= [2\sqrt{x}]_{1/2}^1 - \tfrac{2}{5}[x^{5/2}]_{1/2}^1\\ &= \tfrac{8}{5}-\frac{9}{10}\sqrt{2}\end{aligned}$$

(Q b) Posons, $x=e^t \Leftrightarrow t=\ln(x)$. Alors : $\varphi : x\mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{e^t-2+3e^{-t}}\,dt &= \int_1^e \frac{1/x}{x-2+3/x}\,dx\\ &t=0\Rightarrow x=1, t=1\Rightarrow x=e\\ &= \int_1^e \frac{dx}{x^2-2x+3}\\ &= \int_1^e \frac{dx}{(x-1)^2+2}\\ &= \int_0^{e-1} \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2},\ u=x-1\\ &= \left[\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\right]_0^{e-1}\\ &= \frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{e-1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 22 :

1. On fait le changement de variable : $u=nt \Leftrightarrow t=\dfrac{u}{n}$. On pose donc : $\varphi(u)=\dfrac{u}{n}$. La fonction est affine donc de classe C^1 et $\varphi'(u)=\dfrac{1}{n}$. De plus, pour $t=0$, $u=0$ et pour $t=\pi$, $u=n\pi$, d'où par changement de variable :
$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} e^{-u/n}|\sin(u)|\,du.$$
2. (a) On fait le changement de variable : $w=u-k\pi \Leftrightarrow u=w+k\pi$. On pose donc : $\varphi(w)=w+$

$k\pi$. Cette fonction est toujours affine donc de classe C^1 er $\varphi'(w) = 1$. De plus, pour $u = k\pi$, $w = 0$ et pour $u = (k+1)\pi$, $w = \pi$. Ainsi, par changement de variable :

$$a_k = \int_0^{\pi} e^{-(w+k\pi)/n} |\sin(w + k\pi)|\, dw$$
$$= e^{-k\pi}n \int_0^{\pi} e^{-w/n} |\sin(w + k\pi)|\, dw.$$

Or, $\sin(w+k\pi) = (-1)^k \sin(w)$, donc : $|sin(w+k\pi) = |\sin(w)| = \sin(w)$ car $w \in [0;\ \pi]$, donc : $\sin(w) \geq 0$. Par conséquent :

$a_k = e^{-k\pi}n \int_0^{\pi} e^{-w/n} \sin(w)\, dw$. Il nous reste donc à calculer :

$$\int_0^{\pi} e^{-w/n} \sin(w)\, dw = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{-w/n}e^{iw}\, dw\right).$$

Puisque : $e^{-w/n}e^{iw} = e^{\alpha w}$ avec $\alpha = -1/n + i$, on en déduit :

$$\int_0^{\pi} e^{-w/n}e^{iw}\, dw = \left[\frac{e^{(-1/n+i)w}}{-1/n+i}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{-1/n - i}{1/n^2 + 1}(e^{-\pi.n}e^{i\pi} - 1) = \frac{(1/n+i)e^{-\pi/n} + 1}{1 + 1/n^2}.$$

Au final : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-w/n} \sin(w)\, dw = \frac{e^{-\pi/n} + 1}{1 + 1/n^2}$,

donc : $\boxed{a_k = e^{-k\pi/n}\dfrac{e^{-\pi/n} + 1}{1 + 1/n^2}.}$

(b) Par Chasles, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\, dt = \int_0^{n\pi} f(t)\, dt$,

d'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \int_0^{n\pi} e^{-u/n}|\sin(u)|\, du.$

(c) On en déduit :

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi/n}\frac{e^{-\pi/n} + 1}{1 + 1/n^2}$$
$$= \frac{e^{-\pi/n} + 1}{n(1 + 1/n^2)}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi/n}.$$

On reconnaît alors une somme de termes en progression géométrique de raison : $e^{-\pi/n}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi/n} = \frac{1 - (e^{-\pi/n})^n}{1 - e^{-\pi/n}} = \frac{1 - e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi/n}}.$$

On en déduit : $I_n = \dfrac{e^{-\pi/n} + 1}{n(1 + 1/n^2)}\dfrac{1 - e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi/n}} = \boxed{\dfrac{n(1 - e^{-\pi})}{1 + n^2}\dfrac{1 + e^{-\pi/n}}{1 - e^{-\pi/n}}}.$

3. On rappelle la limite usuelle : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, donc :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\pi/n} - 1}{-\pi/n} = 1$. Or : $\dfrac{e^{-\pi/n} - 1}{-\pi/n} = \dfrac{n(1 - e^{-\pi/n})}{\pi}$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1 - e^{-\pi/n})}{\pi} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} n(1 - e^{-\pi/n}) = \pi.}$$

En remarquant que : $I_n = \dfrac{n^2(1 - e^{-\pi})}{1 + n^2}\dfrac{1 + e^{-\pi/n}}{n(1 - e^{-\pi}n)}$

et puisque $\dfrac{n^2}{n^2 + 1} = \dfrac{1}{1 + 1/n^2}$, on en déduit en passant à la limite : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2(1 - e^{-\pi})}{\pi}.}$

Johann Carl Friedrich Gauß, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains. Dès 1856, le roi de Hanovre fit graver des pièces commémoratives avec l'image de Gauss et l'inscription Mathematicorum Principi («au prince des mathématiciens» en latin). Gauss n'ayant publié qu'une partie infime de ses découvertes, la postérité découvrit la profondeur et l'étendue de son œuvre uniquement lorsque son journal intime, publié en 1898, fut découvert et exploité.

Considéré par beaucoup comme distant et austère, Gauss ne travailla jamais comme professeur de mathématiques, détestait enseigner et collabora rarement avec d'autres mathématiciens. Malgré cela, plusieurs de ses étudiants devinrent de grands mathématiciens, notamment Richard Dedekind et Bernhard Riemann.

Carl Friedrich Gauss étudie l'ensemble des congruences sur les entiers, c'est-à-dire celui composé des restes de la division euclidienne par un nombre entier donné. Cet ensemble est naturellement muni d'une addition et d'une multiplication. L'étude de cette structure porte le nom d'arithmétique modulaire. Elle permet de généraliser les résultats de l'arithmétique élémentaire. Le théorème d'Euler, correspondant à un résultat plus fort que celui du petit théorème de Fermat, illustre une généralisation. L'arithmétique modulaire est utilisée en cryptologie ou pour la construction de codes correcteurs en informatique.