TD 18

Les polynômes

LES INCONTOURNABLES

Exercice 1 : [corrigé] *Équations avec des polynômes.* Déterminer les polynômes tels que : $(P')^2 = 4P$ où P est un polynôme réel.

Exercice 2 : [corrigé] Soit n un entier naturel, a, b deux éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n$ par $B = (X-a)$, puis par $C = (X-a)(X-b)$, puis par $D = (X-a)^2$.

Exercice 3 : [corrigé] Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Q 1) Montrer que $(A - I_2)(A - 3I_2) = 0_{22}$.

(Q 2) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-3)$.

(Q 3) En déduire la valeur de A^n.

Exercice 4 : [corrigé] Factoriser (dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$) les polynômes :

(Q 1) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$; (Q 2) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$; (Q 3) $X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25$.

Exercice 5 : On considère les polynômes

$$\begin{aligned} A &= X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1 \\ B &= X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1. \end{aligned}$$

Factoriser B et démontrer qu'il divise A.

Exercice 6 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et si $\forall i \in \{0; \cdots; n\}, P(i) = 0$ alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

(Q 2) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $\forall x \in [0;1], P(x) = Q(x)$ alors $P = Q$.

Exercice 7 : [corrigé] Soit $P = (X+1)^n - 1, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

(Q 1) Calculer les racines de P puis donner la factorisation de P ainsi que de $x \mapsto \frac{P(x)}{x}$.

(Q 2) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Exercice 8 : [corrigé]

(Q 1) Soit $n \geq 1$. On considère un polynôme P de degré n. Déterminer le degré des polynômes : $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.

(Q 2) On considère la suite de polynômes définies par : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$.

(Q a) Déterminer $H_1; H_2; H_3$.

(Q b) Déterminer le degré de H_n et son coefficient dominant, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : [corrigé] *Équations avec des polynômes.* Déterminer les polynômes tels que :

(Q 1) $P \circ P = P$

(Q 2) $Q^2(X) = XP^2(X)$ où P et Q sont deux polynômes réels.

Exercice 10 : [corrigé] Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

(Q 1) $A = X^6 + 1$, $B = X^3 + X^2 + X + 1$

(Q 2) $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$, $B = 2X^2 - 5X + 2$

(Q 3) $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$, $B = X^7 + X^2$

(Q 4) $A = X^5 + iX^4$, $B = X^2 + 1$

(Q 5) $A = 2X^3 - (1+i)X^2 - iX - (1-i)$, $B = iX + 1$

(Q 6) $A = iX^4 - X^3 + 2iX + 1$, $B = (1-i)X^2 + iX + 1 + i$.

Exercice 11 : [corrigé] Soit n un entier naturel, θ un réel, tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

(Q 1) $A_n = ((\sin\theta)X + \cos\theta)^n$ par $B = X^2 + 1$

(Q 2) $A_n = X^{2n} + X^n + 1$ par $B = X^2 + X + 1$

Exercice 12 : [corrigé] Factoriser (dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$) les polynômes :

(Q 1) $X^4 + X^2 + 1$;

(Q 2) $X^8 + X^4 + 1$;

(Q 3) $X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$;

(Q 4) $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$.

Exercice 13 : [corrigé] Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Déterminer deux racines entières de P ainsi que leurs multiplicités. Vérifier que j est racine de P. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14 : [corrigé] Soit $n \geq 3$. Démontrer que $1 - nX + X^n$ n'a que des racines simples.

Exercice 15 : ($\star$) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

(Q 1) Montrer que si a est une racine éventuellement complexe de P alors a^2 et $(a+1)^2$ sont aussi des racines de P.

(Q 2) En déduire que (a^{2^n}) et $((a+1)^{2^n})$ sont des racines pour tout entier $n \geq 1$.

(Q 3) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

(Q 4) En déduire que si a est une racine de P alors $|a+1| = |a| = 1$.

(Q 5) En déduire les racines de P et la forme de P.

Exercice 16 : [corrigé] En utilisant les relations coefficients racines disponibles sur les polynômes, trouver deux complexes x, y dans chacun des cas suivants :

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ xy &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 1 \\ xy &= 2 \end{cases}$$

Indications

Correction de l'exercice 1 :

On fait une disjonction des cas.

- Si $\deg(P) \leq 0$, c'est à dire P est constant, alors : $P' = 0$ donc : $(P'^2) = 4P \Leftrightarrow P = 0$.
- Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg((P')^2) = 2\deg(P') = 2(\deg(P)-1)$ et $\deg(4P) = \deg(P)$, d'où l'équation : $2(\deg(P)-1) = \deg(P) \Leftrightarrow \deg(P) = 2$.

  Réciproquement si P est de degré 2, donc de la forme : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, alors : $(P')^2 = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$ et $4P = 4aX^2 + 4bX + 4c$ et donc :

  $$4a^2X^2+4abX+b^2 = 4aX^2+4bX+4c \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases}$$

  Or, $a \neq 0$ donc :$4a^2 = 4a \Leftrightarrow a = 1$, il nous reste donc $c = b^2/4$ et b est quelconque ce qui donne : $P = X^2 + bX + b^2/4$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 :

Si $n = 0, R = 1$. Soit $n \geq 1$. Le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n$ par $B = (X-a)$ est $R = a^n$, puis par $C = (X-a)(X-b)$ est (avec $b \neq a$ implicitement) $R = \frac{b^n-a^n}{b-a}X + \frac{a^nb-ab^n}{b-a}$ puis enfin avec $D = (X-a)^2$ est $R = na^{n-1}X + (1-n)a^n$.P Pour ce dernier, il peut être utile de dériver A et $DQ + R$.

Correction de l'exercice 3 :

(Q 1) $(A - I_2)(A - 3I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_{22}$.

(Q 2) Par le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que : $\deg(R) < \deg((X-1)(X-3))$ et $X^n = Q(X-1)(X-3) + R$. On cherche R de la forme $aX + b$. On utilise les racines de $(X-1)(X-3)$ qui nous permettra de nous débarrasser du polynôme Q. On obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} 1 = a+b \\ 3^n = 3a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3^n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3-3^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Le reste est donc le polynôme $\frac{3^n-1}{2}X + \frac{3-3^n}{2}$.

(Q 3) On substitue l'indéterminée X à A et on obtient $A^n = Q(A)(A - I_2)(A - 3I_2) + R(A) =$

$$\boxed{\frac{3^n-1}{2}A + \frac{3-3^n}{2}I_2}$$

Correction de l'exercice 4 :

(Q 1) $(X^2-X+1)^2+1 = (X^2-X+1-i)(X^2-X+1+i)$
Factorisons $(X^2-X+1-i)$ (dans $\mathbb{C}$) Le discriminant est $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$. On cherche une racine carrée (dans $\mathbb{C}$) sous la forme $\omega = a+ib$. Nous obtenons $\omega^2 = a^2 - b^2 + 2aib$, soit $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$. Cela ne suffit pas et il fait penser au module pour obtenir une condition supplémentaire : $|\omega|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = 5$. Ainsi $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$ puis $2b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 4$. Enfin, $ab = 2 \geq 0$ et les deux racines carrées sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Finalement, $(X^2 - X + 1 - i) = (X - \frac{1+1+2i}{2})(X - \frac{1-1-2i}{2}) = (X - [1+i])(X + i)$
Le travail est désormais fini. En effet, on pourrait penser à factoriser par la même méthode le polynôme $(X^2-X+1+i)$, mais cela peut sembler long... Sinon on utilise que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si α est racine alors il en est de même de $\bar{\alpha}$. Finalement, $(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X - [1+i])(X+i)(X - [1-i])(X - i)$
On regroupe les monômes conjugués l'un de l'autre :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

(Q 2) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$:

- Fatorisation dans $\mathbb{C}[X]$: on cherche α tel que : $\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0$. En posant : $\beta = \alpha^3$ nous nous ramenons à l'équation : $\beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0$ de racine évidente -1. La factorisationn donne alors : $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X+i)(X-i)$. Les valeurs de β sont donc : $\beta = -1$, $\beta = i$ ou $\beta = -i$.

  Nous devons donc résoudre : $\alpha^3 = -1 \Leftrightarrow \alpha^3 = e^{i\pi} \Leftrightarrow \alpha = e^{i\pi/3}$ ou $\alpha = e^{i\pi}$ ou $\alpha = e^{i5\pi/3}$.
  De même : $\alpha^3 = i \Leftrightarrow \alpha^3 = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \alpha = e^{i\pi/6}$ ou $\alpha = e^{i5\pi/6}$ ou $\alpha = e^{i3\pi/2}$
  et : $\alpha^3 = -i \Leftrightarrow \alpha^3 = e^{-i\pi/2} \Leftrightarrow \alpha = e^{-i\pi/6}$ ou $\alpha = e^{-i5\pi/6}$ ou $\alpha = e^{-3i\pi/2}$.

  Au final, en notant : $\alpha_1 = e^{i\pi/3}$, $\alpha_2 = e^{i\pi/6}$ et $\alpha_3 = e^{i5\pi}$, le polynôme étant de degré 9 avec 9 racines distinctes et de coefficient dominant égal à 1, nous avons :

  $$\begin{aligned} & X^9 + X^6 + X^3 + 1 \\ = \; & (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\overline{\alpha_1}) \\ & (X-\overline{\alpha_2})(X-\overline{\alpha_3})(X-i)(X+i)(X+1) \end{aligned}$$

- Pour en déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ il nous faut constater que $(X-\alpha_1)(X-\overline{\alpha_1}) = (X^2 - 2\mathcal{R}e(\alpha_1)X + |\alpha_1|^2)$ ce qui donne :

  $$\begin{aligned} & X^9 + X^6 + X^3 + 1 \\ = \; & (X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1) \\ & (X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1) \end{aligned}.$$

Correction de l'exercice 6 :

1. Le polynôme est de degré au plus n et il a au moins $n+1$ racines. Or il devrait en avoir au plus n sauf si c'est le polynôme nul. Ainsi, $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
2. De même, $P-Q$ s'annule sur le segment $[0;1]$, donc une infinité de fois. Seul le polynôme nul réalise cette condition et on en déduit que $P = Q$.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^n = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1 + e^{i2k\pi/n}$ avec $k \in \{0;\cdots;n\}$. Après factorisation par l'angle moitié, nous obtenons l'ensemble des racines pour ce polynôme :

$$\{2ie^{ik\pi/n}\sin(k\pi/n); k \in \{0;\cdots;n\}\}$$

Puisque 0 est racine de P, la fonction $x \mapsto \frac{P(x)}{x}$ est également polynomiale et admet comme racines :

$$\{2ie^{ik\pi/n}\sin(k\pi/n); k \in \{1;\cdots;n\}\}$$

(Q 2) On pose $P = X\prod_{k=1}^{n}\Big(X - 2ie^{ik\pi/n}\sin(k\pi/n)\Big)$. D'autre part, par le Binôme de Newton,

$$P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k - 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}X^k$$
$$= X\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}X^{k-1}\Big) = X\Big(X^{n-1}+\cdots+n\Big).$$

Nous obtenons alors

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(X - 2ie^{ik\pi/n}\sin(k\pi/n)\Big) = \Big(X^{n-1}+\cdots+n\Big).$$

Par relation coefficients-racines, nous avons :

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(2ie^{ik\pi/n}\sin(k\pi/n)\Big) = (-1)^{n-1}\frac{n}{1}$$

Enfin,

$$\prod_{k=1}^{n}2ie^{ik\pi/n} = (2i)^{n-1}e^{i\sum_{k=1}^{n-1}k\pi/n}$$
$$= 2^{n-1}e^{i\pi(n-1)/2}e^{i(n-1)n\pi/(2n)} = 2^{n-1}(-1)^{n-1}$$

La formule est

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(\sin(k\pi/n)\Big) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) Le polynôme P n'est pas constant et $deg(P') \geq 0$. Donc $deg(X^2P') = 2 + deg(P) - 1 = deg(P) + 1 > deg(P)$. Par propriété, $deg(Q) = deg(P)+1$. $deg(R) \leq deg(P)$ car les deux polynômes ont le même degré. Cependant, $P = \sum_{n=0}^{N}a_nX^n$ et $XP' = \sum_{n=1}^{N}na_nX^n$, soit $R = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(n+1)a_nX^n$. On observe que $(N+1)a_N \neq 0$. Ainsi, $deg(R) = deg(P)$.

(Q 2) (Q a) $H_1 = -2X; H_2 = -2+4X^2; H_3 = 12X - 8X^3$.

(Q b) $deg(H_n) = n$ et son coefficient dominant est $(-2)^n$.

Correction de l'exercice 9 :

(Q 1) Avec étude du degré et analyse-synthèse : $P \circ P = P$: polynôme nul, de degré 0 et le polynôme X.

(Q 2) $Q^2(X) = XP^2(X) : Q = 0_{\mathbb{K}[X]} = P$.

Correction de l'exercice 10 :

(Q 1) $Q + X^3 - X^2, R = X^2 + 1$.

Correction de l'exercice 11 :

(Q 1) $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$

(Q 2) De même, en utilisant $j = e^{i2\pi/3}$ et $\bar{j}$, on obtient : $R = 1 + 2\cos(2n\pi/3)$. (avec $n \geq 1$).

Correction de l'exercice 12 :

(Q 1) $X^4 + X^2 + 1$;

(Q 2) $X^8 + X^4 + 1$;

(Q 3) $X^6 - 5X^4 + 19X^2 + 25$

(Q 4) Posons $P = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$. On constate que 1 est racine de P. De plus : $P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine de P d'ordre 2 ce qui mène à la factorisation :
$P = (X-1)^2(X^3+2X^2-X+6)$. On constate que -3 est également racine évidente de X^3+2X^2-X+6 ce qui mène à la factorisation :
$P = (X-1)^2(X+3)(X^2-X+2)$. Comme le trinôme X^2-X+2 a un discrimant négatif, cela donne la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. Les racines complexes de ce trinôme étant : $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :
$P = (X-1)^2(X+3)\Big(X - \Big(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\Big)\Big)\Big(X - \Big(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\Big)\Big)$.

(Q 5) $X^{2n} - 2\cos(n\theta)X^n + 1$:

- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: on résout $\alpha^{2n} - 2\cos(n\theta)\alpha^n + 1 = 0$. En posant $\beta = \alpha^n$ cela donne le trinôme : $\beta^2 - 2\cos(n\theta)\beta + 1 = 0$. Ce-dernier a pour discriminant : $\Delta = -4\sin^2(n\theta) = (2i\sin(n\theta))^2$. Nous avons donc pour racines : $\beta_1 = e^{in\theta}$, $\beta_2 = e^{-in\theta}$. Par ailleurs : $\alpha^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow \alpha = e^{i\theta+2k\pi/n}$, $k \in [\![0;\ n-1]\!]$ et de même :

  $\alpha^n = e^{-in\theta} \Leftrightarrow \alpha = e^{-i\theta+2k\pi/n}$, $k \in [\![0;\ n-1]\!]$.
  Nous avons donc au final la factorisation :

  $$P = \Pi_{k=0}^{n-1}\Big(X - e^{i\theta+2k\pi/n}\Big)\Big(X - e^{-i\theta+2k\pi/n}\Big)$$

- La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'obtient alors très vite car $\overline{e^{i\theta+2k\pi/n}} = e^{-i\theta-2k\pi/n} = e^{-i\theta+2(n-k)\pi/n}$ et car : $\Pi_{k=1}^{n-1}\Big(X - e^{-i\theta+2k\pi/n}\Big) = \Pi_{k=1}^{n-1}\Big(X - e^{-i\theta+2(n-k)\pi/n}\Big)$.
  On en déduit donc :

$$P=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\theta+2\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$

Correction de l'exercice 13 :

- Le nombre 0 est racine. De plus, $P'=7(X+1)^6-7X^6$ et $P'(0)=7$. Le nombre 0 est donc racine simple de P.
- Le nombre -1 est également racine simple ($P(-1)=0$ et $P'(-1)=-7$.)
- Rappelons que j, racine troisième de l'unité, vérifie $j^3=1$ et $j^2+j+1=0$. Ainsi, $P(j)=(j+1)^7-j^7-1=(-j^2)^7-j-1$ puisque $j^6=(j^3)^2=1^2=1$. Ainsi, $P(j)=-j^{14}-j-1=-j^2-j-1=0$. Puis, $P'(j)=7\Big((j+1)^6-j^6\Big)=7\Big((-j^2)^6-1\Big)=7\times 0=0$. Ensuite, $P''=42\Big((X+1)^5-X^5\Big)$ et ainsi $P''(j)=42\Big((-j^2)^5-j^5\Big)=42\Big(-j-j^2\Big)=42$. Le nombre j est donc racine double.
- Puisque P est à coefficients réels, on sait que $\bar{j}$ est également racine double.
- Donc P est divisible par $X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2$, polynôme de degré 6.
- Or le degré de P est 6 et son coefficient dominant est $\binom{7}{6}=7$:

$$P=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}X^k-X^7-1=\binom{7}{6}X^6+\sum_{k=1}^{5}\binom{7}{k}X^k$$

d'après la formule du binôme de Newton.

- Finalement,

$$\boxed{P=7\times X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2=7X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$

Correction de l'exercice 14 :

Supposons qu'il en existe au moins une, α. Alors, par propriété, α est racine de P et P'. Dérivons alors P. Nous obtenons $P'=n\Big(X^{n-1}-1\Big)$. La racine α est donc une racine $n-1$ ième de l'unité : $\alpha^{n-1}=1$. Vis à vis du polynôme P cela donne : $0=\alpha^n-n\alpha+1=\alpha-n\alpha+1=\alpha(1-n)+1$. Puisque $n\geq 3, \alpha=\frac{1}{n-1}$. Or ce dernier nombre n'est pas de module 1 et n'est donc pas une racine de l'unité. Voici donc la contradiction.

Correction de l'exercice 16 :

1. On sait que (x,y) sont racines de $P=X^2-0\times X+2=X^2+2$. Ces dernières sont $\pm\sqrt{2}i$. L'ensemble des solutions est $\{(\sqrt{2}i;-\sqrt{i});(-\sqrt{2}i;\sqrt{i})\}$.
2. Remarquons que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=&1\\ xy&=&2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\frac{x+y}{xy}&=&1\\ xy&=&2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&2\\ xy&=&2\\ x,y&\neq&0\end{array}\right.$$

De même, (x,y) sont racines de $P=X^2-2X+2$. Ces dernières sont $\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$. L'ensemble des solutions est $\{(1+i;1-i);(1-i;1+i)\}$.