

Nombres complexes - Compléments

LES INCONTOURNABLES

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1 : [corrigé] Soit z un nombre complexe distinct de $-i$. Soit $Z = \frac{i-z}{z+i}$.

1. Montrer, en utilisant des arguments de géométrie que $|Z| = 1$ si et seulement si z appartient à une droite que l'on précisera.
2. On souhaite vérifier ceci par calcul.
 - (a) Montrer que $|i - z|^2 = 1 + |z|^2 + i(z - \bar{z})$. De même, donner une expression pour $|z + i|^2$.
 - (b) Conclure

Exercice 2 : [solutions] Résoudre les problèmes suivants et représenter graphiquement les solutions :

1. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z, \frac{1}{z}, 1 - z$ ont le même module.
2. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ telles que les images de z, z^2, z^4 sont alignées.

Exercice 3 : [corrigé] Dans le plan orienté, on considère ABC et DEF deux triangles équilatéraux directs (c'est à dire tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$). On note G et H les points tels que $EDBG$ et $CDFH$ soient des parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. On note a, b, c, d, e, f, g, h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H .
 - (a) Montrer que $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$.
 - (b) De la même façon, exprimer $f - d$ en fonction de $e - d$.
 - (c) Justifiez les égalités : $h - c = f - d, e - d = g - b$.
 - (d) Dédurre des questions précédentes : $h - c = e^{i\pi/3}(g - b)$, puis $h - a = e^{i\pi/3}(g - a)$.
 - (e) En vous aidant de la question précédente, montrer que $AG = AH$ et $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Qu'en déduit-on pour le triangle AGH ?

Nombres complexes et équations

Exercice 4 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

- (a) $z^2 + 1 = 0$; (b) $4z^2 = z - 4$; (c) $z^2 + z - (1 + 3i) = 0$;
 (d) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$; (e) $z^2 - 2\sin(\theta)z + 1 = 0, \theta \in \mathbb{R}$; (f) $z + \frac{10}{z} = 3 - 2i$;

Exercice 5 : [solutions] [corrigé] Déterminer les nombres complexes z et z' tels que : $\begin{cases} z + z' = 3 + i \\ zz' = 2 + 6i \end{cases}$

Exercice 6 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$(a) z^5 + 1 = 0; \quad (b) z^4 - i = 0; \quad (c) z^3 = -(2 + i)^3; \quad (d) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^4 = 1.$$

Exercice 7 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$(a) \bar{z} + 2iz = 1; \quad (b) |z| + iz = 1.$$

Exercice 8 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$(a) e^z = i; \quad (b) e^{2z} + e^z + 1 = 0.$$

Exercice 9 : [solutions] [corrigé] Soient $w = e^{2i\pi/5}$, $S = w + w^4$ et $T = w^2 + w^3$.

1. Calculer $S + T$ et ST . Montrer que S et T sont les solutions de l'équation : $X^2 + X - 1 = 0$.

2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

POUR S'ENTRAÎNER

Nombres complexes et géométrie

Exercice 10 : Résoudre les problèmes suivants et représenter graphiquement les solutions :

1. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 4| = |z + 2i|$.
2. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ telles que les images de z, i, iz forment un triangle équilatéral.

Nombres complexes et équations

Exercice 11 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$(g) z^4 + z^2 - 6 = 0; \quad (h) (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0; \quad (i) (2z^2 - 3z + 1)^2 + 3(z - 1)^2 = 0.$$

Exercice 12 : [solutions] Déterminer une solution réelle puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (4 - i)z + 12 - 6i = 0.$$

Exercice 13 : [solutions] [corrigé] Déterminer les nombres complexes z et z' tels que : $\begin{cases} z + z' = 4 \\ zz' = 4 + 2i \end{cases}$.

Exercice 14 : [solutions] [corrigé] Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 - iz)^n = (1 + iz)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$(a) 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0; \quad (b) 16z^3 = \bar{z}^7.$$

Exercice 16 : [solutions] Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = 1$ et $|z + 2| = 1$.

Exercice 17 : [solutions] Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\begin{cases} e^z + e^{z'} = 2 \\ e^{z+z'} = 2 \end{cases}$

Exercice 18 : [indications] [corrigé] Pour tout réel x , donner une expression simple de :

$$S(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(x + \frac{8\pi}{5}\right).$$

Exercice 19 : [corrigé] Soit z un nombre complexe tel que : $|z| = 1$.

1. Montrer que $|z^2 + 1|^2 + |z^2 - 1|^2 = 4$.
2. Montrer que $\operatorname{Re}(z^2) = 2\operatorname{Re}^2(z) - 1$ (on pourra mettre z sous forme trigonométrique).
3. On suppose : $|z + 1| < 1$.
 - (a) Résoudre géométriquement l'inéquation : $|z + 1| < 1$. On hachurera les points du cercle trigonométrique solutions. En déduire un encadrement de $\operatorname{Re}(z)$.
 - (b) Montrer que : $|z^2 - 1|^2 = 4 - 4\operatorname{Re}^2(z)$ puis : $|z^2 - 1|^2 < 3$.
 - (c) En déduire, en vous aidant du 1., que $|z^2 + 1| > 1$.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que : $|z + 1| \geq 1$ ou $|z^2 + 1| \geq 1$.

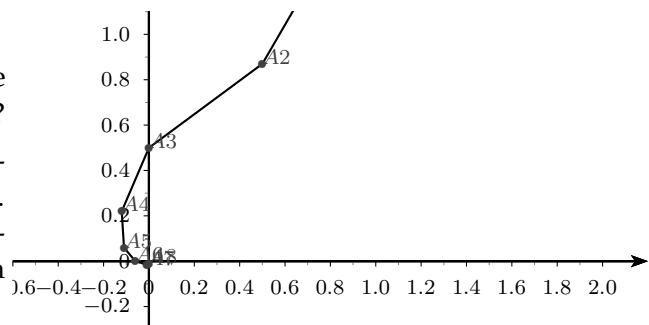
DIVERS

Exercice 20 :

- On pose $w = e^{2i\pi/5}$.
 - Que vaut $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1$?
 - Montrer que le nombre complexe $a = w + \frac{1}{w}$ vérifie $a^2 + a - 1 = 0$.
 - Résoudre l'équation du second degré précédente.
 - En déduire une expression de $\cos(2\pi/5)$.
- Dans le plan, on note, pour $k = 1..5$ les points A_k d'affixes respectives w^k .
 - Pour $k = 1..5$, calculer les longueurs $A_k A_{k+1}$ et vérifier qu'elles sont égales.
 - On considère le point B d'affixe -1 . Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\cos(2\pi/5)$ puis $\sqrt{5}$.
 - On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$ et le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ .
 - Application** : Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Exercice 21 : Prenons le point A d'affixe 4 et effectuons une rotation de centre O et d'angle $\pi/6$ puis sur ce nouveau point une homothétie de centre O et de rapport $1/2$. On obtient donc le point A_1 sur lequel nous effectuons la même procédure afin d'obtenir le point A_2 . Après n itérations de cette procédure, on appelle A_n le point obtenu et on note z_n son affixe.

- Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .
- A partir de quel entier n_0 , cette suite de points est-elle dans le disque unité fermé ?
- Pour tout entier n , on note I_n la longueur de la ligne brisée $A_1 A_2 \dots A_n$. Déterminez-la et en déduire que cette longueur converge vers un nombre que l'on explicitera.



Indications

Exercice 12 : Soit on cherche une solution évidente, soit si $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation alors : $x^3 + y^2 + 4x + 12 = 0$ et $x^2 - x - 6 = 0$.

Exercice 18 : $S(x)$ est la partie réelle de $e^{ix}(1+w+w^2+w^3+w^4)$, avec $w = e^{2i\pi/5}$.

Solution de l'exercice 2 :

1. Médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(4)$ et $B(-2i)$. L'équation de cette droite est $y = 3 - 2x$.
2. $\{B(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i); C(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}(1+i))\}$

Solution de l'exercice 4 :

- (a) $S = \{-i; i\}$, (b) $S = \{\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{63}}{8}i; \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{63}}{8}i\}$, (c) $S = \{-2 - i; 1 + i\}$, (d) $\{1; -1 + 2i\}$, (e) $S = \{\sin(\theta) + i \cos(\theta); \sin(\theta) - i \cos(\theta)\}$, (f) ,

Solution de l'exercice 5 :

$$S = \{(3 - i; 2i); (2i; 3 - i)\}.$$

Solution de l'exercice 6 :

- (a) $S = \{e^{i\pi/5}; e^{i3\pi/5}; -1; e^{i7\pi/5}; e^{i9\pi/5}\}$, (b) $S = \{e^{i\pi/8}; e^{i5\pi/8}; e^{i9\pi/8}; e^{i13\pi/8}\}$, (c) $S = \{-(2 + i); -(2 + i)j; (-2 + i)j^2\}$ $j = e^{2i\pi/3}$, (d) $S = \{0; i; -i\}$.

Solution de l'exercice 7 :

- (a) $\{-\frac{1}{3}(1 + 2i)\}$
- (b) $\{-\frac{i}{2}\}$

Solution de l'exercice 8 :

- (a) $S = \{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, (b) $S = \{i(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi); i(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution de l'exercice 9 :

1. $S+T = -1$ et $ST = -1$. Connaissant leur somme et leur produit, on en déduit qu'ils sont solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
2. L'équation précédente admet pour solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Solution de l'exercice 11 :

- (g) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -i\sqrt{3}; i\sqrt{3}\}$, (h) $S = \{-2 + i; -2 - i; -1 + 2i; -1 - 2i\}$, (i) .

Solution de l'exercice 12 :

$$\{-2; -3i; 1 + 2i\}$$

Solution de l'exercice 13 :

$$S = \{(3 - i; 1 + i); (1 + i; 3 - i)\}.$$

Solution de l'exercice 14 :

1. si n est pair, alors $\{\tan(\frac{k\pi}{n}); k \in \{0; \dots; n-1\} - \{\frac{n}{2}\}\}$
2. sinon, $\{\tan(\frac{k\pi}{n}); k \in \{0; \dots; n-1\}\}$

Solution de l'exercice 15 :

- (a) $\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}\}$
- (b) $\{2 \exp(i\frac{k\pi}{5}); k \in \{0; \dots; 9\}\}$

Solution de l'exercice 16 :

$$S = \{-1\}.$$

Solution de l'exercice 17 :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln(2) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \\ \frac{1}{2} \ln(2) - i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln(2) - i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \\ \frac{1}{2} \ln(2) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Correction de l'exercice 1 : 1. Appelons M le point d'affixe z , le point A d'affixe i et enfin B le point d'affixe $-i$. On sait que

$$|Z| = \frac{AM}{BM}$$

Ainsi, $|Z| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$ ce qui équivaut à M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. Cette médiatrice est l'axe des abscisses.

2. (a) On utilise la formule : $|z|^2 = z \times \bar{z}$. De plus, nous allons utiliser que le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.

$$\begin{aligned} |i - z|^2 &= (i - z) \times \overline{i - z} \\ &= (i - z) \times (-i - \bar{z}) \\ &= -i^2 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} \\ &= \boxed{1 + i(z - \bar{z}) + |z|^2} \end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons :

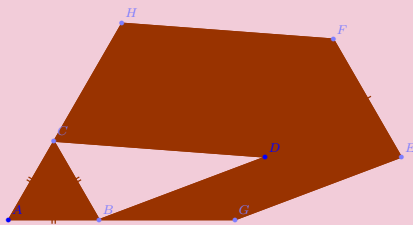
$$\begin{aligned} |i + z|^2 &= (i + z) \times \overline{i + z} \\ &= (i + z) \times (-i + \bar{z}) \\ &= -i^2 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \\ &= \boxed{1 + i(-z + \bar{z}) + |z|^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 |Z| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \\
 &\Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \text{ car } z \neq -i \\
 &\Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \text{ car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est injective} \\
 &\Leftrightarrow 1 + i(z - \bar{z}) + |z|^2 = 1 + i(-z + \bar{z}) + |z|^2 \\
 &\Leftrightarrow (z - \bar{z}) = (-z + \bar{z}) \\
 &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\
 &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des points d'affixes z tels que Z soit de module 1 correspond à l'axe des abscisses. Le résultat est donc retrouvé.

Correction de l'exercice 3 :



1.

2. (a) On sait que $AB = AC$ donc $|b-a| = |c-a|$. De plus, $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Par propriété,

on sait que $\frac{c-a}{b-a} = 1 \times e^{i\pi/3}$.

- (b) F est l'image de D par la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ce qui donne de la même façon :

$$f-d = e^{i\pi/3}(e-d).$$

- (c) $h-c = f-d \Leftrightarrow \vec{CH} = \vec{DF}$. Or $CDFH$ est un parallélogramme, donc l'égalité vectorielle précédente est vérifiée. D'où le résultat. De la même façon, $EDBG$ est un parallélogramme donc : $\vec{DE} = \vec{BG} \Leftrightarrow e-d = g-b$.

- (d) $h-c = f-d$ et $f-d = e^{i\pi/3}(e-d)$ d'après la question 2b. Enfin, d'après la question précédente : $e-d = g-b$. Ainsi : $h-c = e^{i\pi/3}(g-b)$. Par conséquent : $h-a = (h-c) + (c-a) = e^{i\pi/3}(g-b) + e^{i\pi/3}(b-a)$ d'après 2a. Finalement, en factorisant par $e^{i\pi/3}$, nous obtenons : $h-a = e^{i\pi/3}(g-a)$.

- (e) • Puisque : $h-a = e^{i\pi/3}(g-a)$, nous avons : $|h-a| = |e^{i\pi/3}(g-a)| = |e^{i\pi/3}| |g-a|$. Or $|e^{i\pi/3}| = 1$ donc : $|h-a| = |g-a|$.

- $h-a = e^{i\pi/3}(g-a) \Leftrightarrow \frac{h-a}{g-a} = e^{i\pi/3}$. Or, $(\vec{AG}, \vec{AH}) = \arg\left(\frac{h-a}{g-a}\right) [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{h-a}{g-a}\right) = \arg(e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Finalement : $(\vec{AG}, \vec{AH}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- Puisque $|h-a| = |g-a|$, on sait que : $AG = AH$. De plus, $(\vec{AG}, \vec{AH}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Nous pouvons donc affirmer que le triangle AGH est équilatéral (direct).

Correction de l'exercice 4 :

- (a) C'est une équation immédiate, $i, -i$ sont les deux seules solutions.
- (b) On a une équation du second degré, on calcule son discriminant $\Delta = -63$. Une racine carrée est $i\sqrt{63} = 3i\sqrt{7}$. Les solutions sont $\frac{1 \pm 3i\sqrt{7}}{8}$.
- (c) Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 \times (1 + 3i) = 5 + 12i$. On applique la méthode du cours pour trouver une racine carrée de ce nombre complexe puisque aucune forme trigonométrique classique ne peut être obtenue. On cherche $\omega = a + ib$ tel que $\omega^2 = 5 + 12i$. Par identification des parties réelles et imaginaires, puis en utilisant l'égalité des modules, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = |5 + 12i| = 13 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 2 \times a^2 = 18 \\ 2ab = 12 \\ 2 \times b^2 = 8 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} \times a = \pm 3 \\ ab = 6 \\ \times b^2 = \pm 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En utilisant le signe du produit, le nombre $3 + 2i$ est une racine carrée de Δ . Par conséquent, les solutions de l'équation du premier degré sont

$$\frac{-1 \pm (3 + 2i)}{2} = 1 + i \text{ ou } -2 - i$$

- (d) On remarque que 1 est racine évidente. Par propriété, le produit des solutions de cette équation est égale à $\frac{-1+2i}{1} = -1 + 2i$. Les solutions sont donc 1 et $-1 + 2i$.
- (e) Le discriminant est égal à $4 \sin^2(\theta) - 4 = -4 \cos^2(\theta)$ par la relation fondamentale de la trigonométrie. Une racine carrée est donc $2i \cos(\theta)$ et les solutions sont $\frac{2 \sin(\theta) \pm 2i \cos(\theta)}{2} = \sin(\theta) \pm i \cos(\theta)$.
- (f)
- (g) On résout $X^2 + X - 6 = 0$. Les solutions sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = 2 \text{ ou } -3.$$

Finalement, z est solution de l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$ si et seulement si $z^2 = 2$ ou $z^2 = -3$ ce qui équivaut à $z \in \{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{3}\}$.

- (h) Factorisons cette expression :

$$(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = (z^2 + 3z + i(3z + 5)) \times (z^2 + 3z - i(3z + 5))$$

Le nombre z est solution si et seulement si $z^2 + 3z + i(3z + 5) = 0$ ou $z^2 + 3z - i(3z + 5) = 0$.

Correction de l'exercice 5 :

Par propriété, z et z' sont solutions de l'équation $X^2 - (3 + i)X + 2 + 6i = 0$ (*). Le discriminant est $\Delta = -18i = 18 \times e^{i3\pi/2}$. Une racine carrée est $\sqrt{18} \times e^{(i3\pi/2)/2} = 3\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$. Les solutions de l'équation (*) sont donc

$$\frac{(3 + i) \pm 3\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}{2}.$$

On obtient $2i$ et $3 - i$. L'ensemble des solutions est alors

$$\{(2i; 3 - i); (3 - i; 2i)\}$$

Correction de l'exercice 6 :

(a) z est donc une racine cinquième de $-1 = e^{i\pi}$. Par propriété, l'ensemble de ces racines cinquièmes est

$$\{e^{i\pi/5} \times e^{i2k\pi/5}; k \in \{0; \dots; 4\}\}$$

(b) De même z est une racine quatrième de $i = e^{i\pi/2}$. Par propriété, l'ensemble de ces racines cinquièmes est

$$\{e^{i\pi/8} \times e^{i2k\pi/4}; k \in \{0; \dots; 3\}\}$$

(c) z est solution si et seulement si $\frac{z}{2+i}$ est une racine troisième de $-1 = e^{i\pi}$. Par propriété, l'ensemble de ces racines troisièmes est

$$\{e^{i\pi/3} \times e^{i2k\pi/3}; k \in \{0; \dots; 2\}\}$$

Finalement, z est solution si et seulement si il appartient à

$$\{(2 + i) \times e^{i\pi/3} \times e^{i2k\pi/3}; k \in \{0; \dots; 2\}\}$$

(d) Les termes de l'expression sont définis si et seulement si $z \neq 1$. Soit $z \neq 1$.

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{4}} = e^{ik\pi/2}$$

avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} = e^{ik\pi/2} &\Leftrightarrow (z+1) = (z-1)e^{ik\pi/2} \\ &\Leftrightarrow z(1 - e^{ik\pi/2}) = -1 - e^{ik\pi/2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1 - e^{ik\pi/2}}{1 - e^{ik\pi/2}} \text{ avec } k \neq 0 \end{aligned}$$

sinon le terme $1 - e^{ik\pi/2}$ s'annule. Par factorisation par l'angle moitié, on a :

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{ik\pi/2} \Leftrightarrow z = \frac{-2\cos(k\pi/4)}{-2i\sin(k\pi/4)} = -i\frac{\cos(k\pi/4)}{\sin(k\pi/4)}$$

avec $k \neq 0$.

Pour $k = 2$ nous obtenons 0. Si $k \neq 2$ les solutions ont pour expression : $\frac{-i}{\tan(k\pi/4)}$ ce qui donne $\pm i$.

$$S = \{-i; 0; i\}$$

Correction de l'exercice 9 :

1. w est une racine cinquième de l'unité. Or on sait que la somme de ces racines est égale à 0 et que ces dernières, au nombre de 5, sont $1, w, w^2, w^3, w^4$. Ainsi, $S + T + 1 = 0 \Leftrightarrow S + T = -1$. Puis $ST = w^3 + w^4 + w^6 + w^7 = w^3 + w^4 + w + w^2 = -1$. Par propriété, la somme et le produit de deux nombres sont solutions de l'équation $X^2 - (S+T)X + ST = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$.

2. L'équation précédente admet pour solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puis, remarquons que $S = w + w^4 = w + w^{-1} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Finalement, $S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Correction de l'exercice 11 :

(a) On résout $X^2 + X - 6 = 0$. Les solutions sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = 2 \text{ ou } -3.$$

Finalement, z est solution de l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$ si et seulement si $z^2 = 2$ ou $z^2 = -3$ ce qui équivaut à $z \in \{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{3}\}$.

(b) Factorisons cette expression :

$$(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = (z^2 + 3z + i(3z + 5)) \times (z^2 + 3z - i(3z + 5))$$

Le nombre z est solution si et seulement si $z^2 + 3z + i(3z + 5) = 0$ ou $z^2 + 3z - i(3z + 5) = 0$.

Correction de l'exercice 13 :

Par propriété, z et z' sont solutions de l'équation $X^2 - 4X + 4 + 2i = 0$ (*). Le discriminant est $\Delta = -8i = 8 \times e^{i3\pi/2}$. Une racine carrée est $\sqrt{8} \times e^{(i3\pi/2)/2} = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$. Les solutions de l'équation (*) sont donc

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}{2}.$$

On obtient $1 + i$ et $3 - i$. L'ensemble des solutions est alors

$$\{(1 + i; 3 - i); (3 - i; 1 + i)\}$$

Correction de l'exercice 14 :

(a) Utilisons les racines nième de l'unité. Pour cela, on souhaite diviser par $1 + iz$. Ce nombre est nul si et seulement si $z = -\frac{1}{i} = i$. Or i n'est pas solution de

cette équation. Soit donc $z \neq i$.

$$\begin{aligned} (1 - iz)^n &= (1 + iz)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} &\in \{e^{i2k\pi/n}; k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} \\ \Leftrightarrow 1 - iz &= (1 + iz)e^{i2k\pi/n} \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ \Leftrightarrow -iz(1 + e^{i2k\pi/n}) &= e^{i2k\pi/n} - 1 \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ \Leftrightarrow -iz2 \cos(k\pi/n) &= 2i \sin(k\pi/n) \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \end{aligned}$$

On voudrait diviser par $\cos(k\pi/n)$. Étudions si ce facteur peut s'annuler.

$$\cos(k\pi/n) = 0 \Leftrightarrow k\pi/n = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow k = \frac{n}{2}[n].$$

Notons que $k \in \{0; \dots; n-1\}$. Si n est impair, ceci est impossible. En revanche, si n est pair alors nous devons enlever cette valeur. En conclusion,

(a) Si n est impair, l'ensemble des solutions est

$$\{-\tan(k\pi/n); k \in \{0; \dots; n-1\}\}$$

(b) Si n est pair, l'ensemble des solutions est

$$\{-\tan(k\pi/n); k \in \{0; \dots; n-1\} - \{n/2\}\}$$

Correction de l'exercice 18 :

$S(x)$ est la partie réelle de $e^{ix}(w + w^2 + w^3 + w^4)$, avec $w = e^{2i\pi/5}$. Mais $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$ est égal à 0 car c'est la somme des racines cinquièmes de l'unité. Ainsi, $w + w^2 + w^3 + w^4 = -1$ donc $e^{ix}(w + w^2 + w^3 + w^4) = -e^{ix}$, ce qui par identification des parties réelles donne $S(x) = -\cos(x)$.

Correction de l'exercice 19 :

1. Nous avons : $|z^2 + 1|^2 = |z^2|^2 + 2\operatorname{Re}(z^2) + 1$. De même, $|z^2 - 1|^2 = |z^2|^2 - 2\operatorname{Re}(z^2) + 1$. Puisque $|z| = 1$ (donc $|z^2| = 1$), nous avons bien :

$$|z^2 + 1|^2 + |z^2 - 1|^2 = 4.$$

2. Puisque $|z| = 1$, nous pouvons écrire : $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors : $z^2 = (e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$, donc : $\operatorname{Re}(z^2) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Ainsi :

$$\operatorname{Re}(z^2) = 2\cos^2(\theta) - 1.$$

3. (a) On sait que $|z+1| < 1$ revient à dire que $M(z)$ est dans le disque ouvert de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1. Comme de plus $|z| = 1$ on en déduit que M est également sur le cercle trigonométrique. On constate alors l'intersection entre les deux objets précédents est constitué des points du cercle trigonométrique tels que $-1 \leq \operatorname{Re}(z) < -\frac{1}{2}$.

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned} |z^2 - 1|^2 &= |z|^4 - 2\operatorname{Re}(z^2) + 1 \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}(z^2) \text{ car } |z| = 1 \\ &= 2 - 2(2\cos^2(\theta) - 1) \\ &= 4 - 4\cos^2(\theta) \end{aligned}$$

On utilise l'encadrement de la question précédente : puisque $-1 \leq \operatorname{Re}(z) < -\frac{1}{2}$, nous

avons : $\frac{1}{2} < -\operatorname{Re}(z) \leq 1$, d'où : $\operatorname{Re}(z)^2 = (-\operatorname{Re}(z))^2 > \frac{1}{4}$ et enfin : $4 - 4\operatorname{Re}(z)^2 < 4 - 1$.

Finalement : $|z^2 - 1|^2 < 3$.

(c) $|z^2 + 1| = 4 - |z^2 - 1|$. Puisque $|z^2 - 1| < 1$ d'après la question précédente, nous avons :

$$|z^2 + 1|^2 > 4 - 3 \text{ donc } (|z^2 + 1| > 0) : |z^2 + 1| > 1.$$

4. Pour démontrer ceci, nous supposons que nous n'avons pas : $|z + 1| \geq 1$ et nous montrons que forcément : $|z^2 + 1| \geq 1$. Mais si nous n'avons pas : $|z + 1| \geq 1$, cela veut dire que : $|z + 1| < 1$. Or d'après la question précédente, sous une telle hypothèse, nous avons : $|z^2 + 1| > 1$ donc $|z^2 + 1| \geq 1$ ($|z^2 + 1| > 1 \Rightarrow |z^2 + 1| \geq 1$!). Finalement, $|z + 1| \geq 1$ ou $|z^2 + 1| \geq 1$.



¹ Girolamo Cardano (Pavie, 24 septembre 1501 - Rome, 21 septembre 1576), parfois nommé Gerolamo Cardano, Hieronymus Cardanus en latin ou encore Jérôme Cardan en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien.

On lui attribue quelques découvertes en physique, en chimie et en mathématiques. Entre autres, il fut le premier à introduire des idées générales à la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIXe siècle (Méthode de Cardan).

Son nom est également associé à une méthode de stéganographie utilisant une grille à trous masquant une partie d'un texte pour révéler les mots utiles. Elle deviendra plus tard une méthode de cryptographie quand la grille pourra être déplacée d'un quart de tour (technique utilisée, par exemple, dans le roman Mathias Sandorf de Jules Verne).

Cardan a donné son nom à un système mécanique permettant le gyroscope libre et ayant donné naissance au joint de transmission. La découverte figure dans le De subtilitate. Robert Hooke, au XVIIe siècle, perfectionna ce mécanisme pour réaliser un joint brisé, dit aussi joint universel.

Il a avancé le premier exposé du calcul des probabilités (Liber de ludo aleae).

